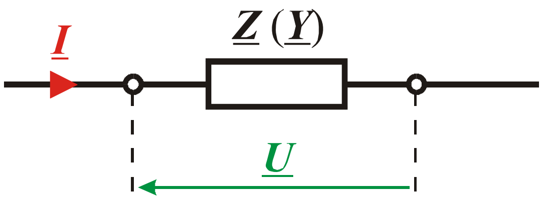
2. REZONANS W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH

2.1. ZJAWISKO REZONANSU

Obwody elektryczne, w których występuje zjawisko rezonansu nazywane są obwodami rezonansowymi lub drgającymi.

Rozpatrując bezźródłowy obwód elektryczny, przedstawiony schematycznie na rys. jako dwójnik.



Rozpatrywany dwójnik

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = G + jB$$

Zjawisko rezonansu przedstawia taki stan pracy obwodu elektrycznego, przy którym reaktancja wypadkowa *X* lub susceptancja wypadkowa *B* obwodu jest równa zeru

Warunkiem rezonansu jest

$$\boxed{X = \mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0} \tag{2.1}$$

lub

$$\boxed{B = \mathrm{Im}(\underline{Y}) = 0} \tag{2.2}$$

Częstotliwość (pulsacja), przy której reaktancja wypadkowa lub susceptancja wypadkowa obwodu jest równa zeru nazywana jest ***częstotliwością (pulsacją) rezonansową.***

Obwód elektryczny osiąga stan rezonansu, jeśli częstotliwość doprowadzonego sygnału sinusoidalnego jest równa częstotliwości rezonansowej obwodu.

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

Ponieważ kąt φ przesunięcia fazowego między napięciem $\underline{U}$ i prądem $\underline{I}$ jest równy

- argumentowi impedancji $\underline{Z}$, przy czym

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = arctg\frac{X}{R} \tag{2.3}$$

lub

- argumentowi admitancji $\underline{Y}$ wziętemu ze znakiem przeciwnym, przy czym

$$\varphi = -\arg(\underline{Y}) = -arctg\frac{B}{G} \; ; \tag{2.4}$$

stąd

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{dla } X = 0 \text{ lub } B = 0}$$

Oznacza to, że

zjawiskiem rezonansu nazywamy taki stan pracy obwodu elektrycznego, przy którym prąd i napięcie na jego zaciskach są ze sobą w fazie (a argument impedancji lub admitancji obwodu jest równy zeru)

Impedancja $\underline{Z}$ obwodu <u>w stanie rezonansu</u> równa się rezystancji obwodu

$$\boxed{\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) = R} \; , \tag{2.5}$$

a jego admitancja $\underline{Y}$, jest równa konduktancji G

$$\boxed{\underline{Y} = \mathrm{Re}(\underline{Y}) = G} \; . \tag{2.6}$$

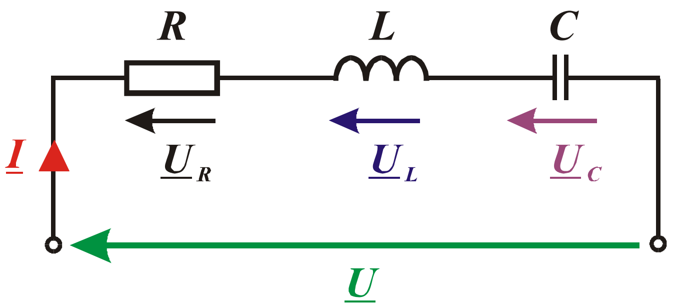
Rezonans występujący w obwodzie, w którym elementy R, L, C połączone są szeregowo, nazywamy ***rezonansem napięć*** lub *rezonansem szeregowym*.

Rezonans występujący w obwodzie, w którym połączone są równoległe gałęzie R, L oraz R, C lub gałęzie R, L, C nazywamy ***rezonansem prądów*** lub *rezonansem równoległym*.

2.2. REZONANS NAPIĘĆ

PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozważając obwód składający się z elementów *R*, *L* i *C* połączonych szeregowo - zakłada się, że przyłożone napięcie jest sinusoidalnie zmienne o symbolicznej wartości skutecznej $\underline{U}$ i o pulsacji $\omega = 2\pi f$.



Dla rozpatrywanego obwodu słuszne są zależności

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_R &= R\,\underline{I} \\ \underline{U}_L &= jX_L\,\underline{I} \\ \underline{U}_C &= -jX_C\,\underline{I} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \left[R + j\left(X_L - X_C\right)\right]\underline{I} = \left(R + jX\right)\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I} \tag{1.90}$$

Impedancja obwodu wynosi

$$\underline{Z} = R + jX = R + j\left(X_L - X_C\right) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{2.8}$$

Warunkiem rezonansu (2.1) jest to, aby X=0 lub X_L=X_C , czyli

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \tag{2.9}$$

Pulsację rezonansową ω_r obwodu szeregowego *RLC* znajduje się z powyższego równania, otrzymując

$$\boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \tag{2.10}$$

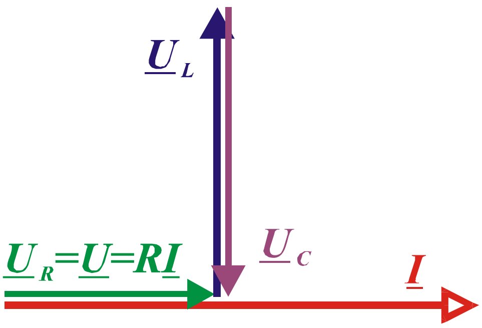
stąd częstotliwość rezonansowa f_r wynosi

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{2.11}$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

WŁASNOŚCI OBWODU W STANIE REZONANSU NAPIĘĆ

1. **impedancja obwodu jest równa rezystancji** (impedancja osiąga wartość minimalną)	$\underline{Z} = R$
2. **napięcie na rezystancji obwodu jest równe napięciu przyłożonemu do obwodu**	$\underline{U}_R = \underline{U}$
3. **suma geometryczna napięć na indukcyjności i pojemności obwodu jest równa zeru**	$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$
4. **napięcie na indukcyjności jest co do modułu równe napięciu na pojemności**	$U_L = U_C$
5. wobec X=0, **prąd w obwodzie osiąga wartość maksymalną**	$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}$
6. **kąt przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a prądem jest równy zeru**	$\varphi = 0$



Wykres wskazowy

Ze względu na równość modułów napięć na elementach reaktancyjnych i fakt, że mogą być one **wielokrotnie większe** od modułu napięcia przyłożonego - rezonans w rozpatrywanym obwodzie nazywamy **rezonansem napięć**.

Parametrem, który wskazuje ile razy napięcie na indukcyjności lub pojemności jest większe od napięcia na zaciskach obwodu w stanie rezonansu jest dobroć Q.

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC} \ . \tag{2.12}$$

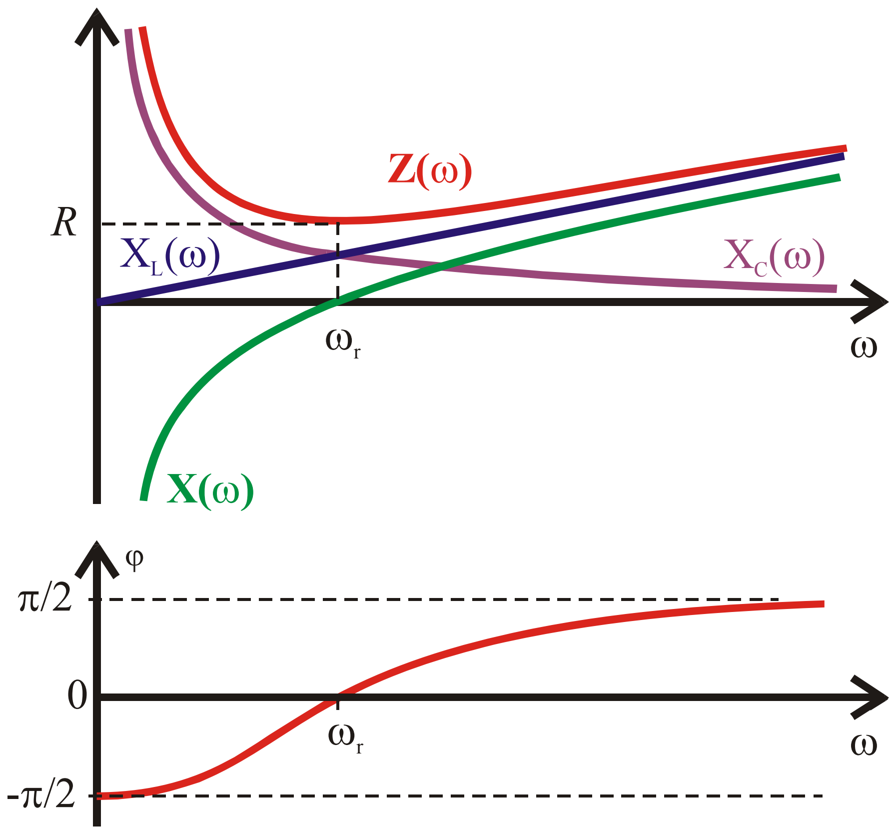
$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R} \quad \text{, gdzie } \rho = \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.13}$$

ρ **jest reaktancją charakterystyczną** obwodu

CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOSCIOWE

określają zależność parametrów wtórnych obwodów (impedancji, reaktancji itd.) **od częstotliwości** (lub pulsacji).

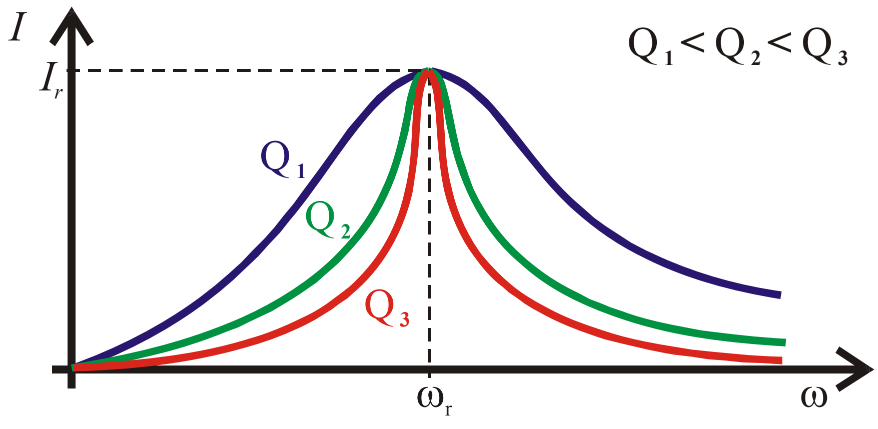
• charakterystyka reaktancji indukcyjnej obwodu	$X_L(\omega)=\omega L$
• charakterystyka reaktancji pojemnościowej obwodu	$X_C(\omega)=\frac{1}{\omega C}$
• charakterystyka reaktancji wypadkowej obwodu	$X(\omega)=\omega L-\frac{1}{\omega C}$
• charakterystyka impedancji (modułu impedancji) obwodu	$Z(\omega)=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$
• charakterystyka kąta przesunięcia fazowego (argumentu impedancji) obwodu	$\varphi(\omega)=arctg\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$

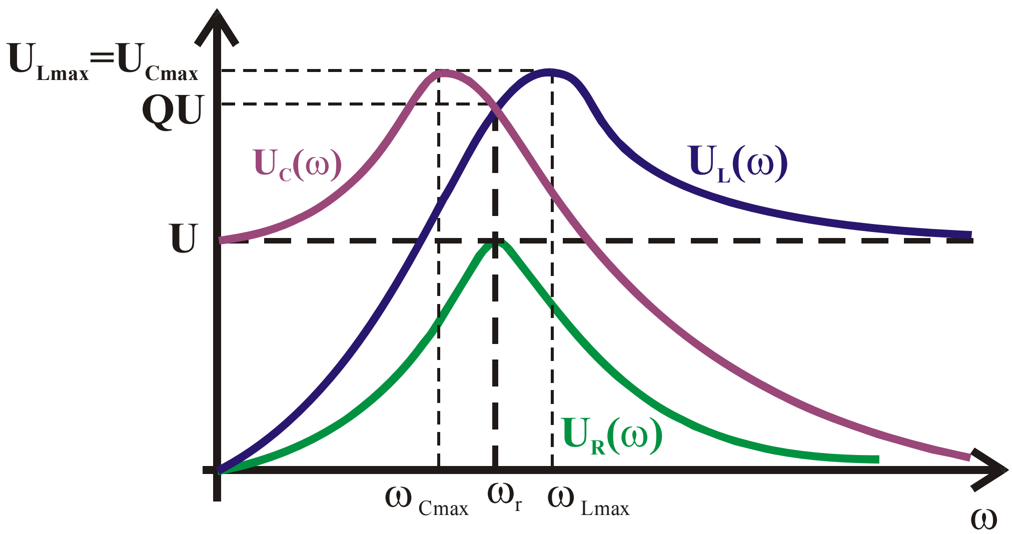


KRZYWE REZONANSOWE

Wykresy zależności wartości skutecznych napięć i prądów obwodów rezonansowych od częstotliwości (lub pulsacji) **noszą nazwę krzywych rezonansowych**

• krzywa rezonansowa prądu	$I(\omega)=\dfrac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$
• krzywe rezonansowe napięć na elementach obwodu	$U_R(\omega)=I(\omega)R$
	$U_L(\omega)=I(\omega)\,\omega L$
	$U_C(\omega)=I(\omega)\dfrac{1}{\omega C}$



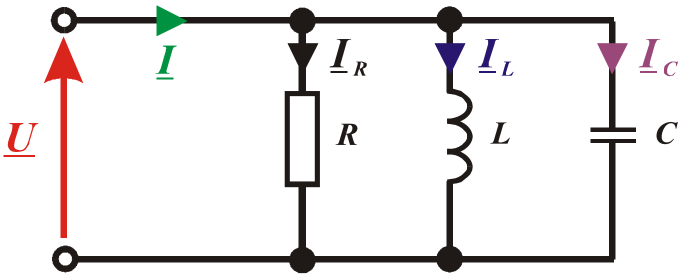


dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

2.3. REZONANS PRĄDÓW

PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozważając obwód składający się z elementów R, L i C połączonych równolegle - zakłada się, że przyłożone napięcie jest sinusoidalnie zmienne o symbolicznej wartości skutecznej $\underline{U}$ i o pulsacji $\omega = 2\pi f$.



Dla rozpatrywanego obwodu słuszne są zależności

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_R &= G\underline{U} \\ \underline{I}_L &= -jB_L\underline{U} \\ \underline{I}_C &= jB_C\underline{U} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \left[G + j\left(B_C - B_L\right)\right]\underline{U} = \left(G + jB\right)\underline{U} = \underline{Y}\,\underline{U} \tag{2.15}$$

Admitancja obwodu wynosi

$$\underline{Y} = G + jB = G + j\left(B_C - B_L\right) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \tag{2.16}$$

Warunkiem rezonansu (2.2) jest to, aby B=0 lub B_C=B_L , czyli

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}. \tag{2.17}$$

Pulsację rezonansową ω_r obwodu równoległego RLC znajduje się z powyższego równania, otrzymując

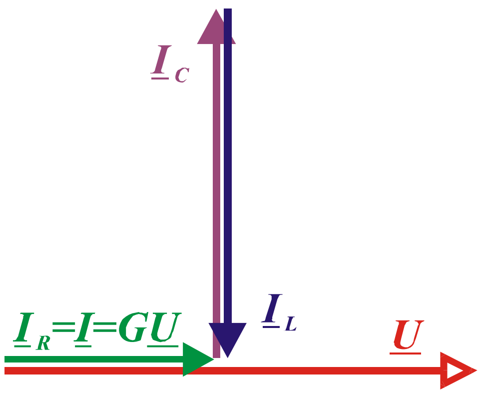
$$\boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \qquad \textit{(zal. 2.10)}$$

stąd częstotliwość rezonansowa f_r wynosi $$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \qquad \textit{(zal. 2.11)}$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

WŁASNOŚCI OBWODU W STANIE REZONANSU PRĄDÓW

1. **admitancja obwodu jest równa konduktancji** (admitancja osiąga wartość minimalną)	$\underline{Y} = G$
2. **prąd w gałęzi rezystancyjnej jest równy prądowi obwodu**	$\underline{I}_R = \underline{I}$
3. **suma geometryczna prądów w gałęzi indukcyjności i pojemnościowej obwodu jest równa zeru**	$\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0$
4. **prąd w gałęzi indukcyjnej jest co do modułu równy prądowi w gałęzi pojemnościowej**	$I_L = I_C$
5. wobec B=0, **prąd w obwodzie osiąga wartość minimalną**	$\underline{I} = \underline{U}\, G$
6. **kąt przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a prądem jest równy zeru**	$\varphi = 0$



Wykres wskazowy

Ze względu na równość modułów prądów w gałęziach reaktancyjnych i fakt, że mogą być one wielokrotnie większe od modułu prądu dopływającego do obwodu - rezonans w rozpatrywanym obwodzie nazywamy **rezonansem prądów**

Parametrem, który wskazuje ile prąd w gałęzi z indukcyjnością lub pojemnością jest większy od prądu dopływającego do obwodu w stanie rezonansu jest dobroć Q.

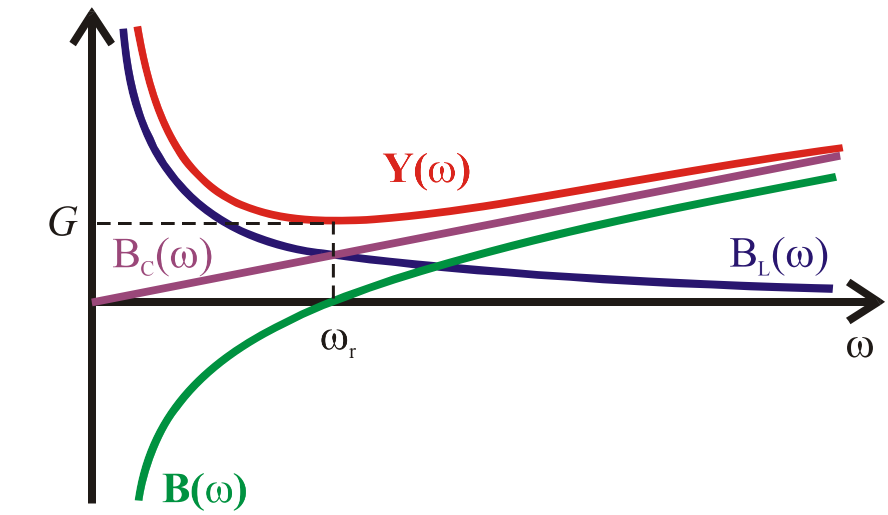
$$Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{1}{\omega_r L G} = \frac{\omega_r C}{G}. \qquad (2.18)$$

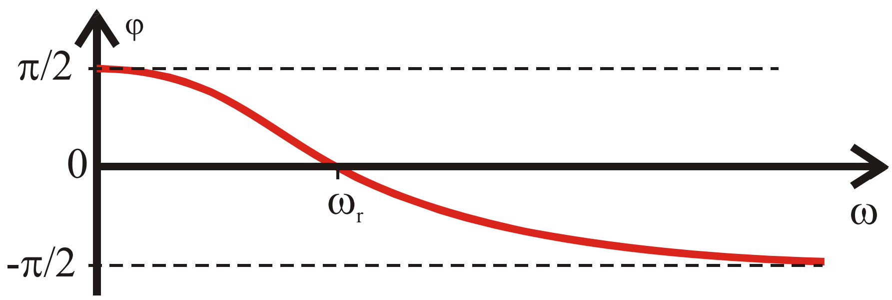
$$Q = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{\rho}, \qquad (2.19)$$

Gdzie, podobnie jak to miało miejsce w przypadku obwodu szeregowego, ρ jest reaktancją charakterystyczną.

CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOSCIOWE

• charakterystyka susceptancji indukcyjnej obwodu	$B_L(\omega)=\dfrac{1}{\omega L}$
• charakterystyka susceptancji pojemnościowej obwodu	$B_C(\omega)=\omega C$
• charakterystyka susceptancji wypadkowej obwodu	$B(\omega)=\omega C-\dfrac{1}{\omega L}$
• charakterystyka admitancji *(modułu admitancji)* obwodu	$Y(\omega)=\sqrt{G^2+\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}$
• charakterystyka kąta przesunięcia fazowego *(argumentu admitancji wziętego ze znakiem przeciwnym)* obwodu	$\varphi(\omega)=-arctg\dfrac{\omega C-\dfrac{1}{\omega L}}{G}$





KRZYWE REZONANSOWE

• zależność prądu obwodu od pulsacji	$I(\omega)=U\,Y(\omega)=U\sqrt{G^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}$
• zależność prądu w gałęzi indukcyjnej od pulsacji	$I_L(\omega)=\frac{U}{\omega L}$
• zależność prądu w gałęzi pojemnościowej od pulsacji	$I_C(\omega)=\omega CU$