ĆWICZENIE 5

BADANIE CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH UKŁADU ELEKTRYCZNEGO

Cel ćwiczenia: poznanie charakterystyk częstotliwościowych liniowych układów elektrycznych.

5.1. Podstawy teoretyczne ćwiczenia

5.1.1. Charakterystyka częstotliwościowa

Dla układu liniowego będącego w stanie ustalonym, badanego przy przebiegach harmonicznych dla określonej pulsacji, słuszna jest zależność:

$$\underline{K} = \frac{\underline{R_m}}{\underline{F_m}} = K \cdot e^{j\Theta} \tag{5.1}$$

gdzie: $\underline{R_m}$ – zespolona amplituda odpowiedzi układu na wymuszenie $\underline{F_m}$,

$\underline{F_m}$ – zespolona amplituda wymuszenia układu,

$\underline{K}$ – transmitancja układu,

przy tym moduł transmitancji K określony jest stosunkiem wartości skutecznej odpowiedzi i wymuszenia

$$K = \frac{R}{F} \ , \tag{5.2}$$

natomiast argument transmitancji Θ wyraża kąt przesunięcia fazowego odpowiedzi w odniesieniu do wymuszenia

$$\Theta = \psi_R - \psi_F \ . \tag{5.3}$$

Przy czym sygnałem określonym na wyjściu układu może być sygnał napięciowy lub prądowy. Sygnałem wymuszającym, przyłożonym do wejścia układu elektrycznego, może być również sygnał napięciowy lub prądowy. W związku z tym, określa się różne rodzaje transmitancji układu:

- napięciową (odpowiedzią jest sygnał napięciowy, wymuszeniem jest również sygnał napięciowy),
- prądową (odpowiedzią jest sygnał prądowy, wymuszeniem jest również sygnał prądowy),

- napięciowo-prądową (odpowiedzią jest sygnał prądowy, wymuszeniem jest sygnał napięciowy),
- prądowo-napięciową (odpowiedzią jest sygnał napięciowy, wymuszeniem jest sygnał prądowy).

Charakterystyką częstotliwościową układu liniowego (będącego w stanie ustalonym, o zerowych warunkach początkowych) nazywana jest zależność transmitancji od pulsacji:

$$\underline{K}(\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) \qquad \omega \in (0 \div \infty) \tag{5.4}$$

Wielkości $K(\omega)$, $\Theta(\omega)$, $\mathrm{Re}[\underline{K}(\omega)]$, $\mathrm{Im}[\underline{K}(\omega)]$ są funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej ω i noszą odpowiednio nazwy: charakterystyki amplitudowej, charakterystyki fazowej, charakterystyki części rzeczywistej i charakterystyki części urojonej transmitancji.

W układach regulacji wprowadza się często pojęcie charakterystyki amplitudowo-fazowej, w której transmitancja $\underline{K}(\omega)$, będąca liczbą zespoloną, jest przedstawiana na płaszczyźnie zmiennej zespolonej(P(ω);Q(ω)). Dla $\omega \in (0 \div \infty)$ otrzymujemy krzywą nazwaną wykresem Nyquista charakterystyki amplitudowo – fazowej $\underline{K}(\omega)$.

Charakterystyki częstotliwościowe podaje się na ogół, z uwagi na ich czytelność, wygodę posługiwania się lub uwypuklenie pewnych cech, we współrzędnych względnych lub we współrzędnych logarytmicznych. Charakterystyki o współrzędnych logarytmicznych nazywamy charakterystykami logarytmicznymi.

Jako współrzędne względne dla modułu transmitancji (immitancji) przyjmuje się na ogół stosunek wartości wymienionych wielkości do pewnej wartości charakterystycznej, np. maksymalnej. Mówimy wówczas o charakterystyce względnej:

$$k(\omega) = \frac{K(\omega)}{K_{\max}(\omega)} \tag{5.5}$$

Jako współrzędne względne dla pulsacji lub częstotliwości przyjmuje się najczęściej pulsacje względną $\frac{\omega}{\omega_c}$, lub częstotliwość względną $\frac{f}{f_c}$, przy tym jako wartość ω_c, (lub f_c) przyjmujemy charakterystyczną dla układu wartość pulsacji (lub częstotliwości), np. częstotliwość rezonansową, bądź częstotliwość rozgraniczającą pasmo przepustowe od pasma zaporowego.

Jako współrzędne logarytmiczne dla modułu transmitancji (immitancji) przyjmuje się moduł transmitancji wyrażony w decybelach, zgodnie ze wzorem:

$$k_{dB}(\omega) = 20\lg K(\omega) \quad , \tag{5.6a}$$

lub

$$k_{dB}(\frac{\omega}{\omega_c}) = 20\lg K(\frac{\omega}{\omega_c}) \quad . \tag{5.6b}$$

Jako współrzędne logarytmiczne pulsacji (częstotliwości) przyjmuje się najczęściej logarytm dziesiętny pulsacji lub pulsacji względnej,

$$x_d = \lg\omega , \tag{5.7}$$

$$x_d = \lg\frac{\omega}{\omega_c} = \lg\frac{f}{f_c} \tag{5.8}$$

lub logarytm o podstawie 2 pulsacji lub pulsacji względnej

$$x_b = \log_2 \omega , \tag{5.9}$$

$$x_b = \log_2 \frac{\omega}{\omega_c} = \log_2 \frac{f}{f_c} \quad . \tag{5.10}$$

W pierwszym przypadku mówimy o dekadowej skali częstotliwości x_d, której charakterystyczną cechą jest stała długość odcinka odpowiadającego zmianie o jedną dekadę częstotliwości. W drugim mówimy o oktawowej skali częstotliwości x_b, gdzie długość odcinka odpowiada zmianie częstotliwości o oktawę.

5.1.2. Parametry częstotliwościowe układu

Dla charakterystyk częstotliwościowych układu możemy wyróżnić szereg parametrów częstotliwościowych, które w sposób jednoznaczny określają jego właściwości, np.:

- częstotliwość graniczna (dolna, górna),
- pasmo przenoszenia,
- częstotliwość środkowa pasma przenoszenia,
- nierównomierność charakterystyki,
- nachylenie charakterystyki częstotliwościowej,
- selektywność.

Przez częstotliwość graniczną rozumie się taką jej wartość, przy której moduł transmitancji maleje o 3dB w stosunku do wartości nominalnej.

Pasmo przenoszenia jest to zakres częstotliwości, w którym moduł transmitancji maleje nie więcej niż 3dB w stosunku do wartości nominalnej. Miarą pasma przenoszenia układu S_p

jest różnica częstotliwości granicznych górnej f_g i dolnej f_d, zwana szerokością pasma przenoszenia, a zatem:

$$S_p = f_g - f_d \tag{5.11}$$

Częstotliwość środkowa pasma przenoszenia f_0 określona jest średnią arytmetyczną częstotliwości granicznej górnej i dolnej pasma przenoszenia, czyli:

$$f_0 = \frac{f_g + f_d}{2} \tag{5.12}$$

Nierównomierność charakterystyki częstotliwościowej układu określa się na ogół maksymalną różnicą modułu transmitancji układu w zadanym pasmie przenoszenia.

Nachylenie charakterystyki częstotliwościowej określa się liczbą decybeli wyrażającą zmianę modułu transmitancji układu na dekadę lub oktawę częstotliwości w zadanym zakresie częstotliwości.

Selektywność układu określa zdolność układu do rozdziału częstotliwościowego przenoszonych sygnałów. Miarą jej jest współczynnik prostokątności charakterystyki częstotliwościowej:

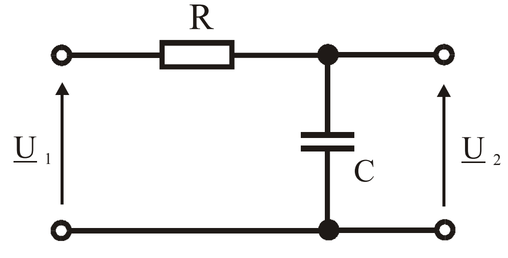
$$p = \frac{S_{p(3db)}}{S_{p(20db)}} \tag{5.13}$$

gdzie: $S_{p(3dB)}$ - szerokość pasma przenoszenia na poziomie 3dB,

$S_{p(20dB)}$ - szerokość pasma przenoszenia na poziomie 20dB.

5.1.3. Charakterystyki częstotliwościowe układów RC pierwszego rzędu

W przypadku układu dolnoprzepustowego klasy *RC*, o schemacie zastępczym jak na rys. 5.1, funkcja transmitancji napięciowej wyrażona jest wzorem 5.14.



Rys. 5.1. Układ RC dolnoprzepustowy I-go rzędu

$$\underline{K}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_g}} = K(\omega) \cdot e^{jQ(\omega)} \tag{5.14}$$

gdzie $\omega_g = \dfrac{1}{RC}$ nazwana jest pulsacją graniczną

Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową tego układu można wyrazić wzorem (5.15), natomiast charakterystykę fazowo-częstotliwościową wzorem (5.16):

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dfrac{\omega}{\omega_g})^2}} \tag{5.15}$$

$$\theta(\omega) = -arctg\frac{\omega}{\omega_g} \tag{5.16}$$

Charakterystykę logarytmiczną amplitudowo-częstotliwościową można określić następująco:

$$k_{dB}(\frac{\omega}{\omega_g}) = 20\lg K(\frac{\omega}{\omega_g}) = -10\lg[1 + (\frac{\omega}{\omega_g})^2] \tag{5.17}$$

przy tym charakterystykę asymptotyczną amplitudowo-częstotliwościową tego układu można przedstawić następująco:

$$k_{dB}(\lg\frac{\omega}{\omega_g}) = \begin{cases} 0 & przy \quad \lg\dfrac{\omega}{\omega_g} \le 0 \\ -20\lg\dfrac{\omega}{\omega_g} & przy \quad \lg\dfrac{\omega}{\omega_g} \rangle 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

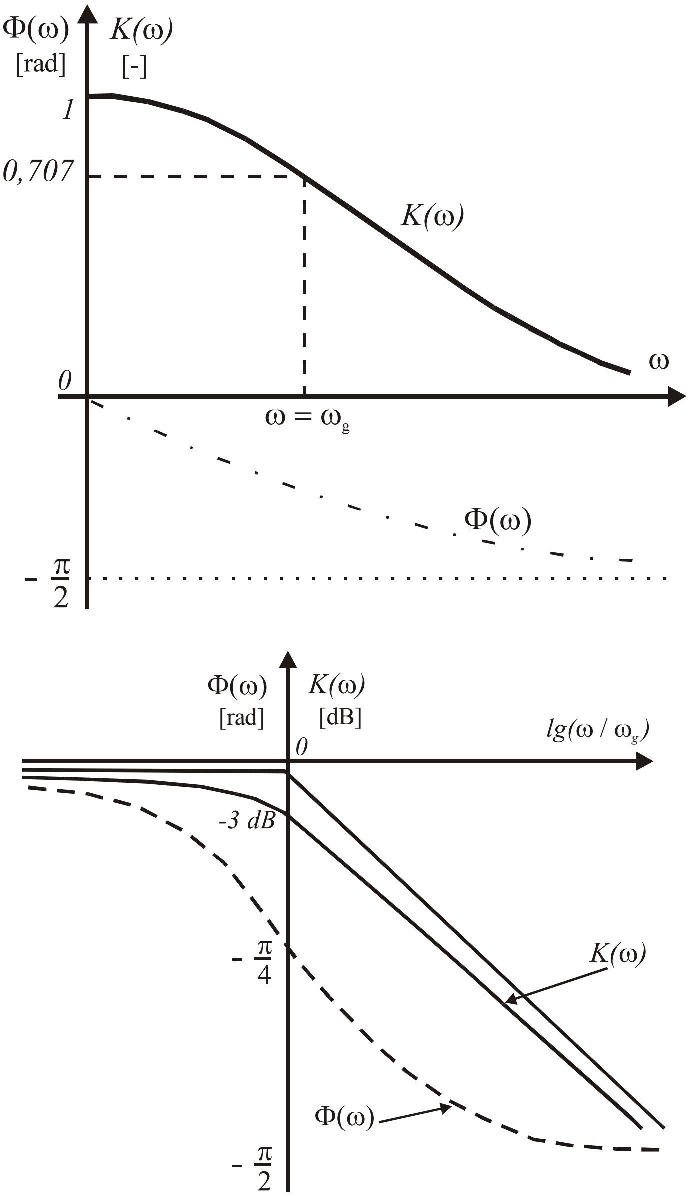
natomiast charakterystyka asymptotyczna fazowo-częstotliwościowa powyższego układu ma postać:

$$\theta(\lg\frac{\omega}{\omega_g}) = \begin{cases} 0 & przy \quad \lg\dfrac{\omega}{\omega_g} \le 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & przy \quad \lg\dfrac{\omega}{\omega_g} \rangle 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe w skali liniowej i logarytmicznej rozpatrywanego układu przedstawiono na rys. 5.2.

a)

b)



Rys. 5.2. Charakterystyki częstotliwościowe układu RC I – rzędu dolnoprzepustowego

a) w skali liniowej, b) w skali logarytmicznej

W przypadku układu pierwszego rzędu, o schemacie zastępczym jak na rys. 5.3, transmitancja napięciowa wyraża się zależnością:

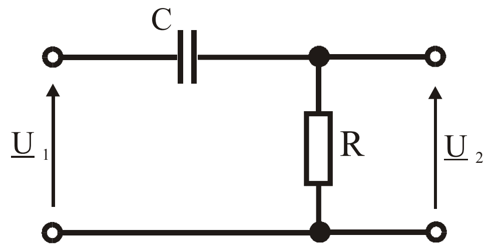
$$\underline{K} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \tag{5.20}$$

Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową tego układu można wyrazić wzorem (5.21), a fazowo-częstotliwościową – wzorem (5.22)

$$K(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_g}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_g})^2}} \quad , \tag{5.21}$$

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega}{\omega_g} \quad . \tag{5.22}$$

gdzie $\omega_g = \dfrac{1}{RC}$,



Rys. 5.3. Układ RC górno – przepustowy I-go rzędu

Charakterystykę logarytmiczną amplitudowo-częstotliwościową można określić następująco (przy założeniu, że poziom 0 dB odpowiada pulsacji $\omega >> \omega_g$)

$$k_{dB}(\frac{\omega}{\omega_g}) = 20\lg K(\frac{\omega}{\omega_g}) = 20\lg\frac{\omega}{\omega_g} - 10\lg[1 + (\frac{\omega}{\omega_g})^2] \tag{5.23}$$

przy tym charakterystykę asymptotyczną amplitudowo-częstotliwościową tego układu można określić następująco:

$$k_{dB}(\lg\frac{\omega}{\omega_g}) = \begin{cases} 20\lg\frac{\omega}{\omega_g} & przy \quad \lg\frac{\omega}{\omega_g} \le 0 \\ 0 & przy \quad \lg\frac{\omega}{\omega_g} \rangle 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

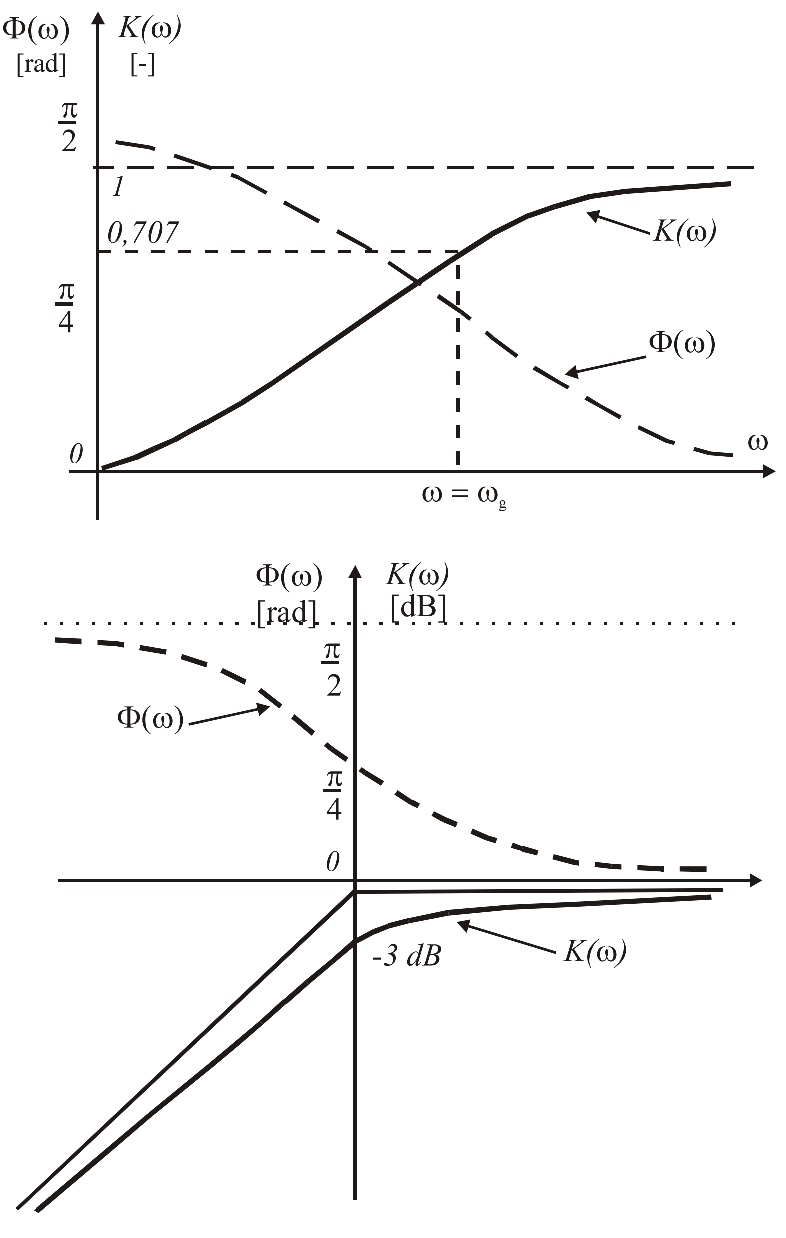
natomiast charakterystykę asymptotyczną fazowo-częstotliwościową tego układu można przedstawić jako:

$$\theta(\lg\frac{\omega}{\omega_g}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & przy \quad \lg\frac{\omega}{\omega_g} \le 0 \\ 0 & przy \quad \lg\frac{\omega}{\omega_g} \rangle 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe rozważanego układu podane są na rys.5.4.

a)

b)



Rys. 5.4. Charakterystyki częstotliwościowe układu RC górno- przepustowego a) w skali liniowej, b) w skali logarytmicznej

5.1.4 Charakterystyki częstotliwościowe układu II rzędu RC

Funkcję transmitancji układu złożonego można przedstawić w postaci iloczynu transmitancji układów połączonych kaskadowo, przy tym sygnał wyjściowy układu poprzedniego jest określony z uwzględnieniem wpływu obciążenia układów następnych. Jeżeli wpływ obciążenia kolejnych układów jest pomijalnie mały, to transmitancję $\underline{K}$ układu zastępczego określa się iloczynem transmitancji $\underline{K}_i$ poszczególnych jego członów, czyli:

$$\underline{K} = \prod_{i=1}^{n} \underline{K_i} \tag{5.26}$$

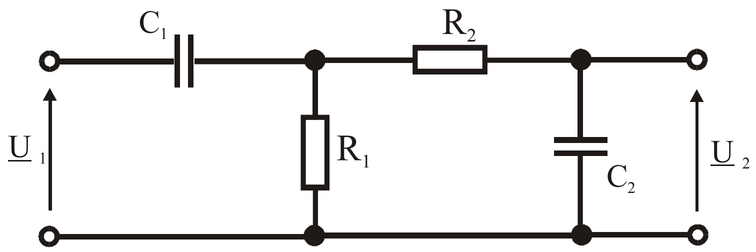
gdzie n – liczba układów połączonych kaskadowo.

Rozważając układ *RC* II-rzędu, zbudowany z kaskadowo połączonych członów *RC* I-rzędu dolno i górno przepustowych jak na rys. 5.5, można przedstawić transmitancję wymienionych członów jako:

a) $\underline{K_1} = \dfrac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_1}$ - układ RC górnoprzepustowy,

b) $\underline{K_2} = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau_2}$ - układ RC dolnoprzepustowy.

gdzie: $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$

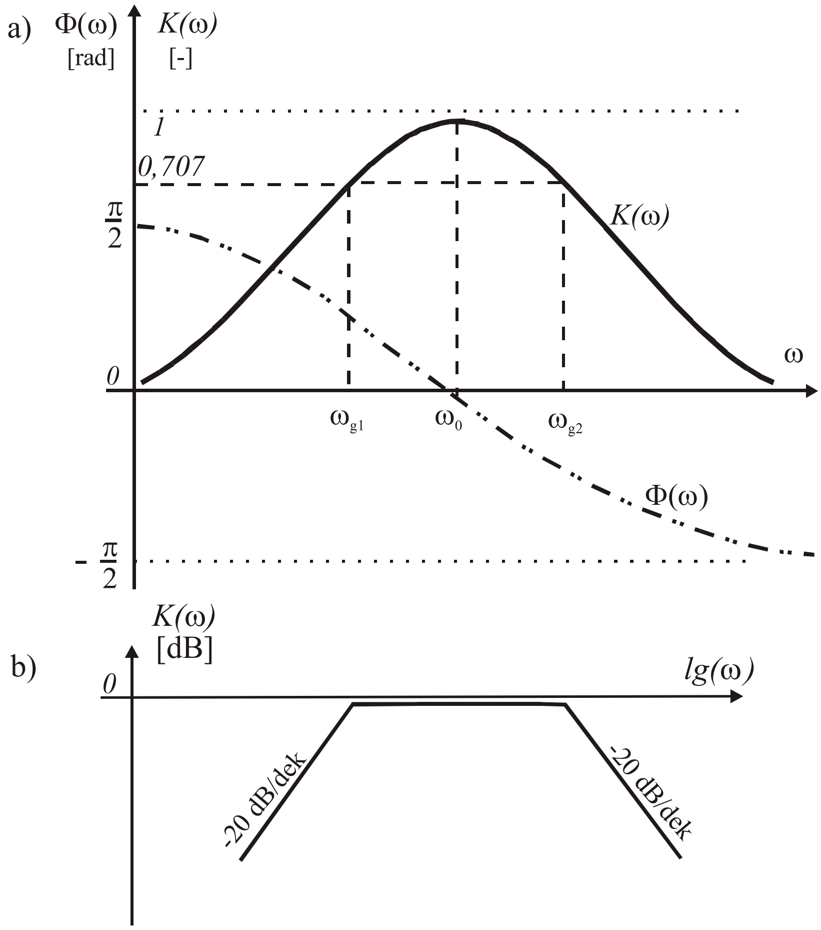


Rys. 5.5. Schemat elektryczny układu RC zbudowany z kaskadowo połączonych członów RC dolno i górno przepustowych

Zatem funkcja transmitancji napięciowej układu z rys. 5.5 będzie określona zależnością:

$$\underline{K} = \underline{K_1} \cdot \underline{K_2} = \frac{j\omega\tau_1}{(1 + j\omega\tau_1)\cdot(1 + j\omega\tau_2)} \tag{5.27}$$

Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe układu RC-II rzędu, zbudowanego z układów RC-I rzędu o transmitancjach $\underline{K_1}$ i $\underline{K_2}$, o pulsacjach granicznych występujących na częstotliwościach $\omega_{g1} = \dfrac{1}{\tau_1}$ oraz $\omega_{g2} = \dfrac{1}{\tau_2}$, przedstawiono na rys. 5.6.



Rys. 5.6. Charakterystyki częstotliwościowe układu RC środkowo - przepustowego

a) w skali liniowej, b) asymptotyczne