

3. PODSTAWOWE PRAWA I TWIERDZENIA TEORII OBWODÓW

3.1. SCHEMAT IDEOWY OBWODU

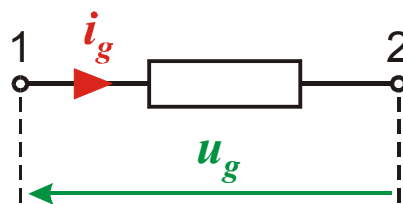
Schematem ideowym obwodu (siecią) nazywamy graficzne przedstawienie obwodu, pokazujące kolejność i sposób połączeń jego elementów.

Wszystkim uwzględnionym w modelu parametrom układu odpowiadają określone elementy, ich symbole graficzne oraz wartości, natomiast odcinki łączące elementy traktujemy jako idealne przewodniki (nie rozpraszające i nie akumulujące energii).

Na schemacie wyróżniamy: **gałęzie**, **węzły** i **oczka**.

Gałąź obwodu jest to układ zawierający jeden lub wiele dowolnie połączonych elementów (zarówno pasywnych jak i aktywnych), posiadający dwie wyprowadzone końcówki (zaciski) do połączenia z pozostałą częścią obwodu.

Gałąź jest więc dwójnikiem do opisu którego wystarczy znajomość napięcia gałęziowego u_g i prądu gałęziowego i_g .

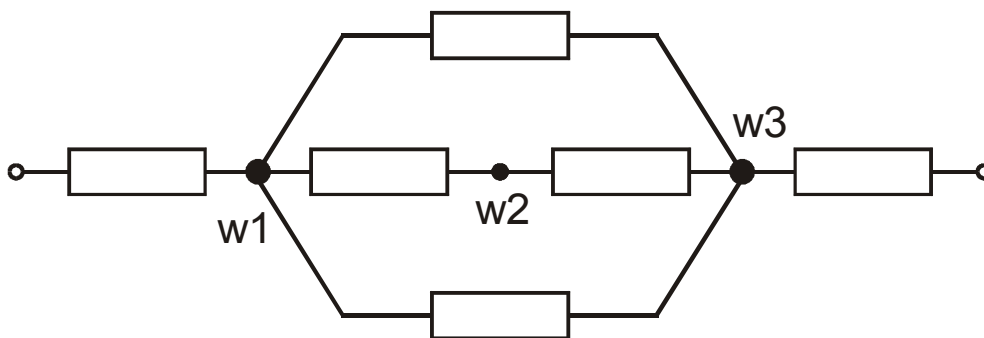


Gałąź obwodu

Końcówkom gałęzi często narzuca się kolejność, tzn. oznaczamy jedną z nich jako pierwszą (1), która stanowi początek gałęzi a pozostałą jako drugą (2), stanowiącą jej koniec.

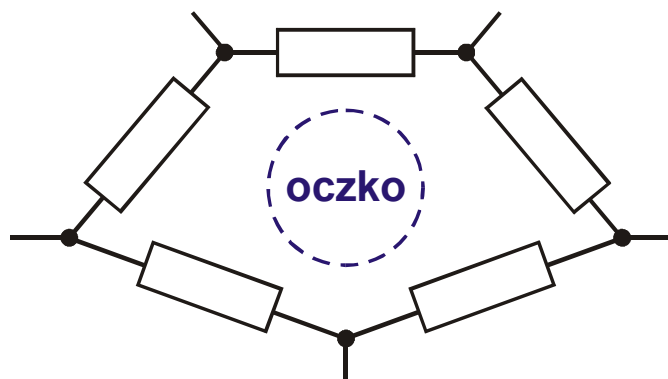
Węzeł obwodu nazywamy końcówkę (zacisk) gałęzi, do której jest przyłączona jedna następna gałąź lub kilka gałęzi.

- **Węzeł główny** obwodu nazywamy końcówkę (zacisk) gałęzi do której dołączono co najmniej dwie inne gałęzie (w1 i w3). Zatem węzeł główny (zwany potocznie węzłem), to taki punkt (zacisk) obwodu w którym zbiegają się co najmniej trzy końcówki różnych gałęzi.
- Jeśli liczba zbiegających się w punkcie końcówek gałęzi jest równa dwa, to punkt nazywamy **węzłem pomocniczym**. (w2).



Ilustracja pojęcia węzła głównego i pomocniczego

Oczko obwodu elektrycznego jest to zbiór połączonych ze sobą gałęzi tworzących zamkniętą drogę dla prądu i posiadającą tę właściwość, że po usunięciu dowolnej gałęzi oczka pozostałe gałęzie nie tworzą drogi zamkniętej.



Ilustracja pojęcia oczka obwodu

- UWAGA:**
- obwodem prostym bądź obwodem nierozgałęzionym nazywamy obwód zawierający wyłącznie jedno oczko,
 - obwodem złożonym lub inaczej rozgałęzionym nazywamy obwód zawierający nie mniej niż dwa oczka.

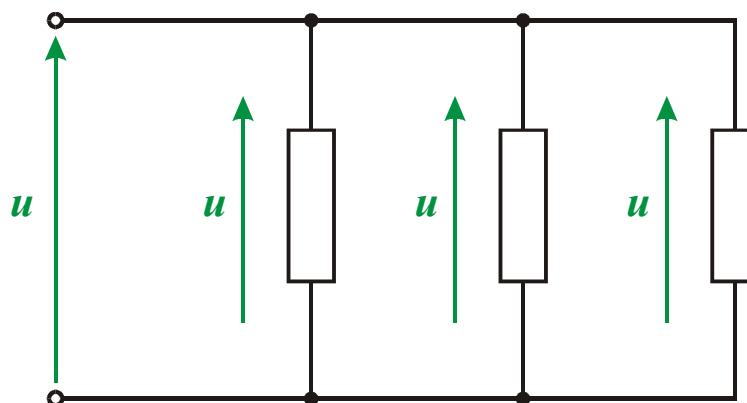
Gałęzie obwodu mogą tworzyć połączenie:
szeregowe, równoległe, gwiazdowe lub **wieloboczne** (wielokątne).

- Układ połączeń nazywamy **szeregowym**, wtedy gdy w każdej gałęzi układu występuje **ten sam prąd elektryczny**, tzn. o tej samej wartości i zwrocie.



Połączenie szeregowe

- Układ połączeń nazywamy **równoległym**, wtedy gdy na każdej gałęzi układu występuje **to samo napięcie elektryczne**, tzn. o tej samej wartości i zwrocie.



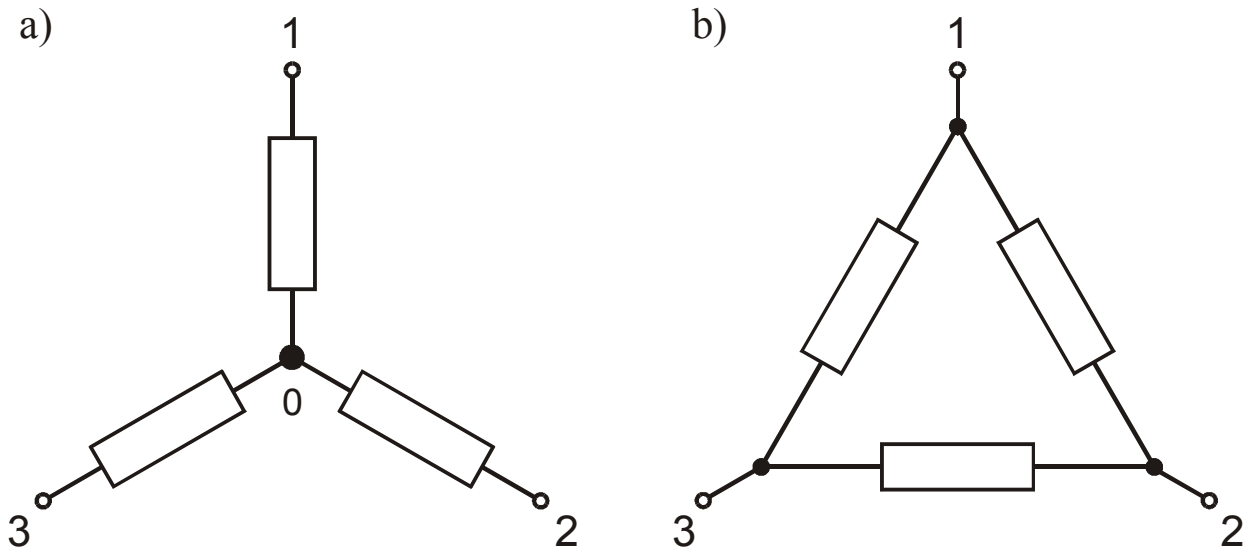
Połączenie równoległe

- Połączenie n gałęzi obwodu w taki sposób, że końce każdej z gałęzi tworzą wspólny węzeł (zwany punktem zerowym), pozostałe zaś końce dołączone są do innych elementów obwodu nazywamy połączeniem **gwiazdowym**.

Szczególnym przypadkiem połączenia gwiazdowego przy $n = 3$ jest połączenie w gwiazdę trójramienną.

- Połączenie gałęzi obwodu w figurę płaską, która ma n wierzchołków i boki łączące każdy wierzchołek z wszystkimi pozostałymi, nazywamy połączeniem **wielokątnym** (wielobocznym).

Szczególnym przypadkiem połączenia wielokątnego przy $n = 3$ jest połączenie w trójkąt.



*Połączenie: a) gwiazdowe (gwiazda trójramienna),
b) wielokątne (trójkątowe)*

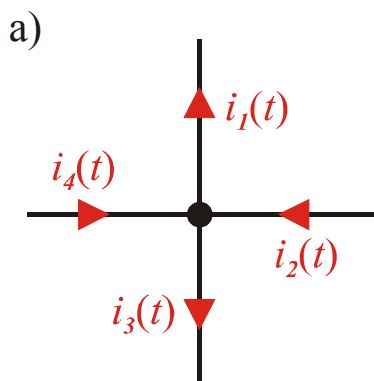
3.2. PRAWA KIRCHHOFFA I ZASADA TELLEGENA

I prawo Kirchhoffa - prądowe prawo Kirchhoffa (PPK)

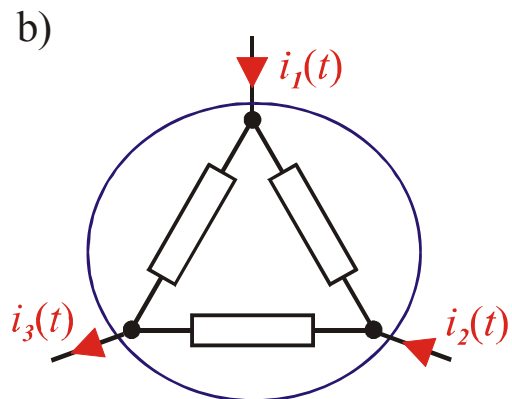
Algebraiczna suma natężeń prądów we wszystkich gałęziach dołączonych do jednego, dowolnie wybranego węzła obwodu jest w każdej chwili czasu równa zero:

$$\sum_t^n \lambda_k i_k(t) = 0 \quad (3.1)$$

gdzie: $\lambda_k = \pm 1$ (+ jeśli prąd elektryczny ma zwrot do węzła; - jeśli zwrot jest przeciwny, od węzła)



$$-i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0$$



$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$$

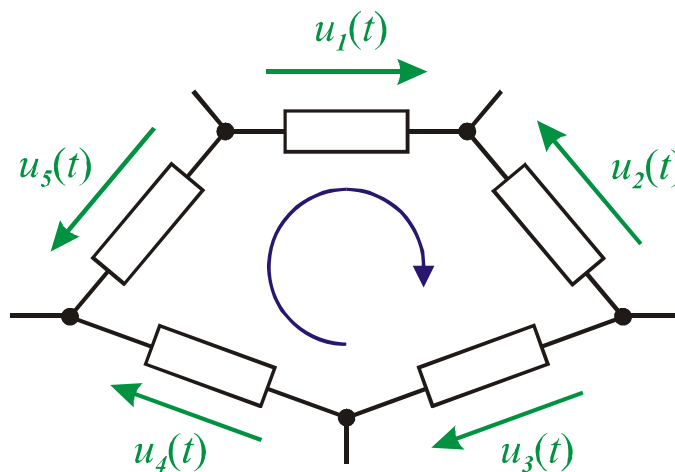
Ilustracja PPK: a) dla węzła, b) dla węzła jako obszaru

II prawo Kirchhoffa - napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK)

Algebraiczna suma napięć na wszystkich elementach, tworzących dowolnie wybrane oczko obwodu, jest w każdej chwili czasu równa zero:

$$\sum_{k=1}^n v_k u_k(t) = 0 \quad (3.2)$$

gdzie: $v_k = \pm 1$ (+ jeśli zwrot napięcia jest zgodny z przyjętym za dodatni kierunkiem obiegu oczka; - jeśli jest przeciwny)



$$u_1(t) - u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) - u_5(t) = 0$$

Ilustracja NPK

Zasada Tellegena

W każdym odosobnionym obwodzie (obwodzie nie wymieniającym energii z otoczeniem) skupionym suma mocy chwilowych pobieranych przez wszystkie elementy obwodu jest w każdej chwili czasu równa zero:

$$\hat{\bigwedge}_t \sum_{k=1}^n p_k(t) = 0 \quad (3.3)$$

Pamiętając, że w każdej chwili niektóre elementy obwodu faktycznie pobierają moc ($p_k > 0$) a inne ją faktycznie oddają ($p_k < 0$) z powyższej zależności wynika, iż:

suma mocy pobieranych przez elementy obwodu skupionego jest w każdej chwili równa sumie mocy oddawanych przez pozostałe elementy obwodu.

Zasada Tellegena zwana jest także zasadą **BILANSU MOCY**.

Taki sam wniosek formułuje się w odniesieniu do energii pobranych i oddanych przez elementy obwodu skupionego w dowolnym przedziale czasu od t_1 do t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n p_k(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} p_k(t) dt = 0 \quad (3.4)$$

Oznacza to, że

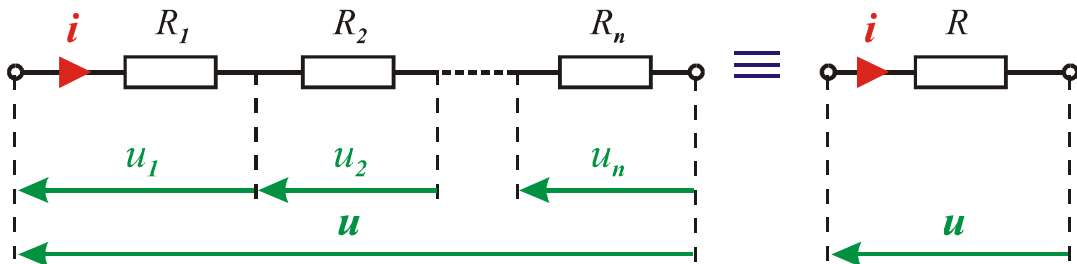
w dowolnym przedziale czasu $\langle t_1, t_2 \rangle$ suma energii pobranych przez elementy obwodu skupionego jest równa sumie energii oddanych przez pozostałe elementy obwodu.

Zasada Tellegena wyraża zatem także zasadą **zachowania energii**.

3.3. ŁĄCZENIE SZEREGOWE I RÓWNOLEGŁE ELEMENTÓW

➤ ŁĄCZENIE REZYSTORÓW

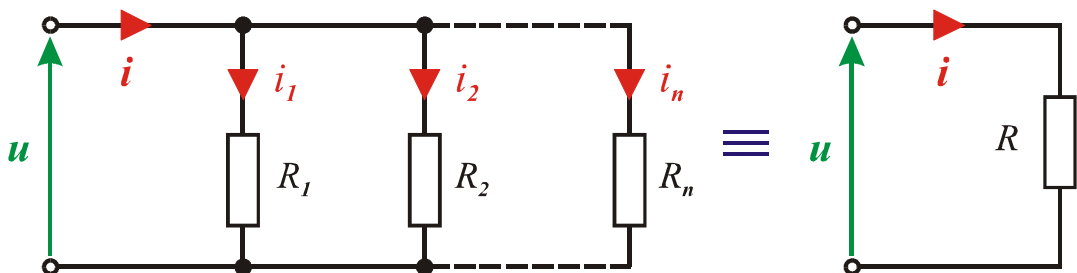
- Połączenie szeregowe n rezystorów



$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i = \sum_{k=1}^n R_k i = R i \quad (3.5)$$

$$R = \sum_{k=1}^n R_k \quad (3.6)$$

- Połączenie równoległe n rezystorów

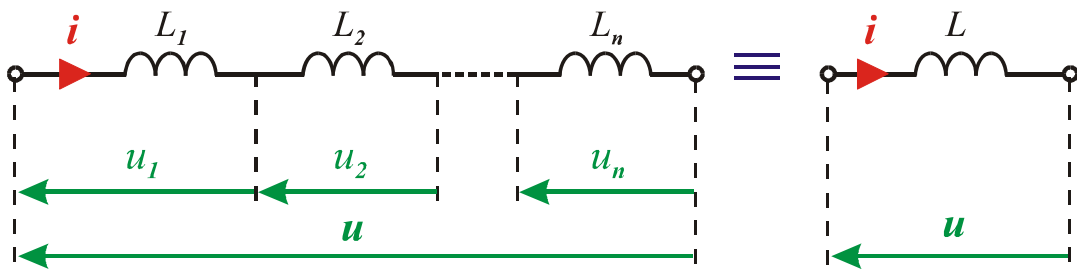


$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = G_1 u + G_2 u + \dots + G_n u = \sum_{k=1}^n G_k u = G u \quad (3.7)$$

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \quad \text{lub} \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (3.8)$$

➤ ŁĄCZENIE CEWEK INDUKCYJNYCH

- **Połączenie szeregowe** n cewek indukcyjnych

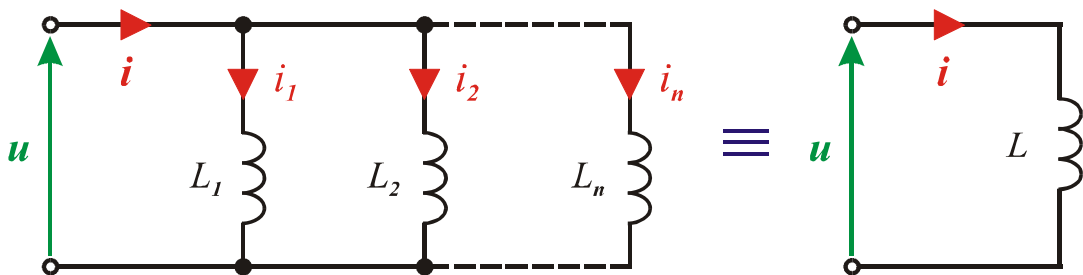


$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{d\Psi_1}{dt} + \frac{d\Psi_2}{dt} + \dots + \frac{d\Psi_n}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.9)$$

$$\Psi = L_1 i + L_2 i + \dots + L_n i = \sum_{k=1}^n L_k i = L i \quad (3.10)$$

$$L = \sum_{k=1}^n L_k \quad (3.11)$$

- **Połączenie równoległe** n cewek indukcyjnych



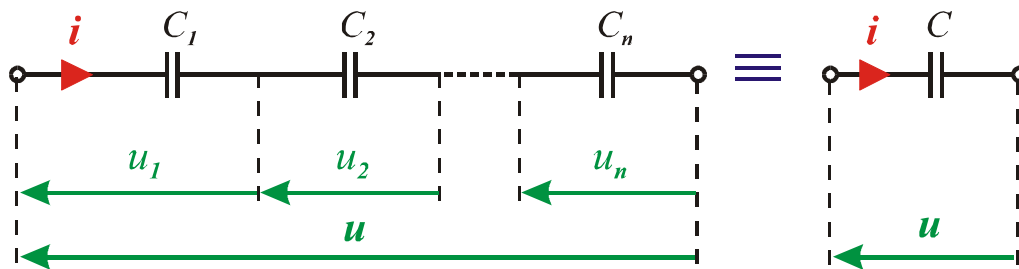
$$u = \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{d\Psi_2}{dt} = \dots = \frac{d\Psi_n}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \Rightarrow \Psi_1 = \Psi_2 = \dots = \Psi_n = \Psi \quad (3.12)$$

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \frac{\Psi}{L_1} + \frac{\Psi}{L_2} + \dots + \frac{\Psi}{L_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \Psi = \frac{\Psi}{L} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad (3.14)$$

➤ ŁĄCZENIE KONDENSATORÓW

• Połączenie szeregowe n kondensatorów

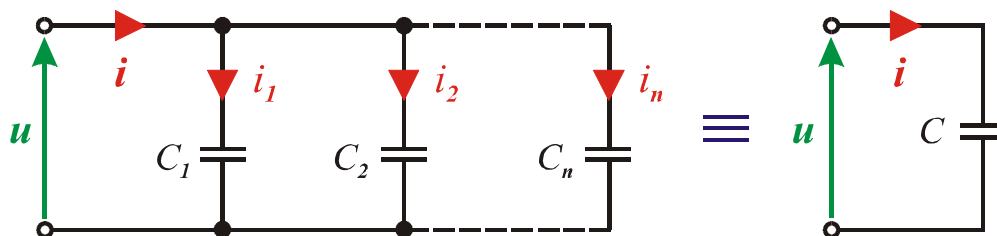


$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = \dots = \frac{dq_n}{dt} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q_1 = q_2 = \dots = q_n = q \quad (3.15)$$

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} q = \frac{q}{C} \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (3.17)$$

• Połączenie równoległe n kondensatorów



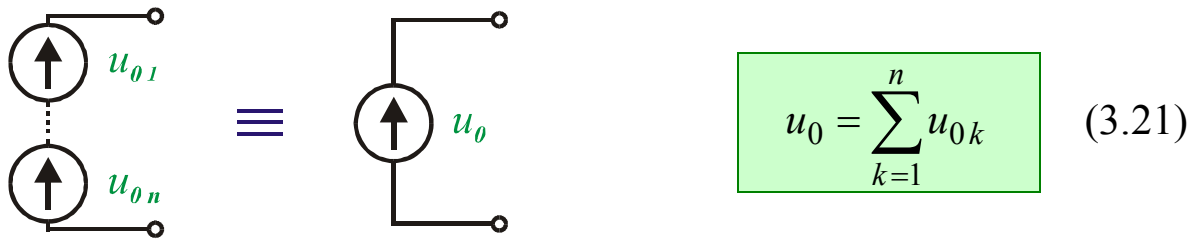
$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{dq_n}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad (3.18)$$

$$q = C_1 u + C_2 u + \dots + C_n u = \sum_{k=1}^n C_k u = C u \quad (3.19)$$

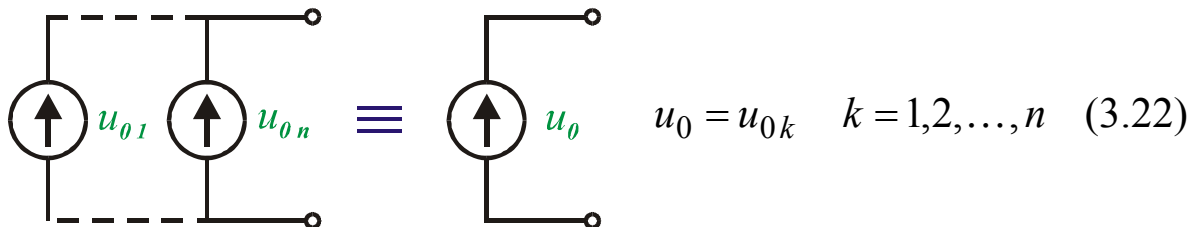
$$C = \sum_{k=1}^n C_k \quad (3.20)$$

➤ ŁĄCZENIE IDEALNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIA

- **Połączenie szeregowe** n idealnych źródeł napięcia

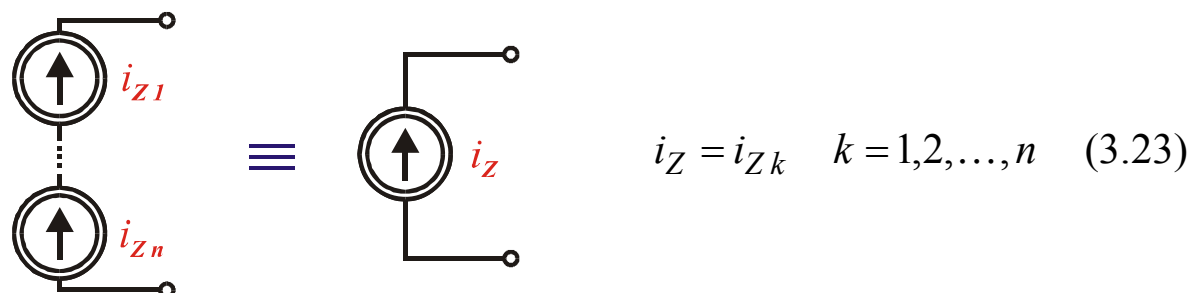


- **Połączenie równoległe** n idealnych źródeł napięcia jest możliwe (z uwagi na równość definicyjną (2.19)) **tylko w przypadku szczególnym**, gdy wszystkie siły elektromotoryczne są jednakowe.

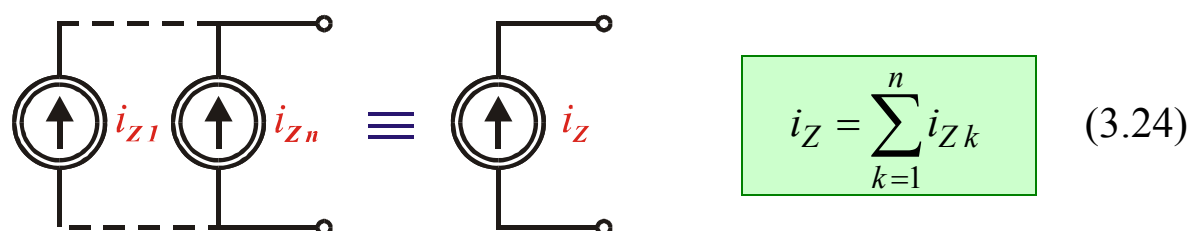


➤ ŁĄCZENIE IDEALNYCH ŹRÓDEŁ PRĄDU

- **Połączenie szeregowe** n idealnych źródeł prądu jest możliwe (z uwagi na równość definicyjną (2.20)) **tylko w przypadku szczególnym**, gdy wszystkie wydajności prądowe są jednakowe



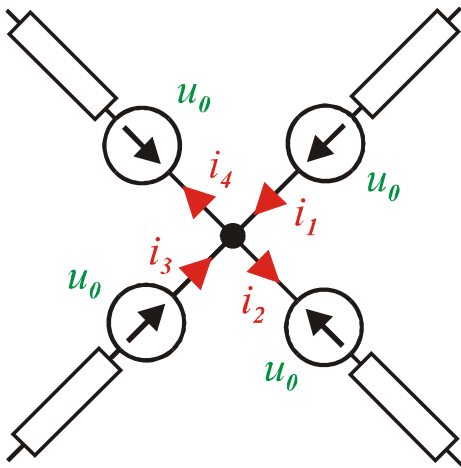
- **Połączenie równoległe** n idealnych źródeł prądu



3.4. TWIERDZENIA VASCHY'EGO

I twierdzenie Vaschy'ego

W obwodzie rozgałęzionym rozptyw prądów nie ulegnie zmianie, jeżeli do każdej gałęzi dołączonej do dowolnego węzła włączy się szeregowo idealne, jednakowe o tym samym zwrocie względem węzła, źródła napięcia.

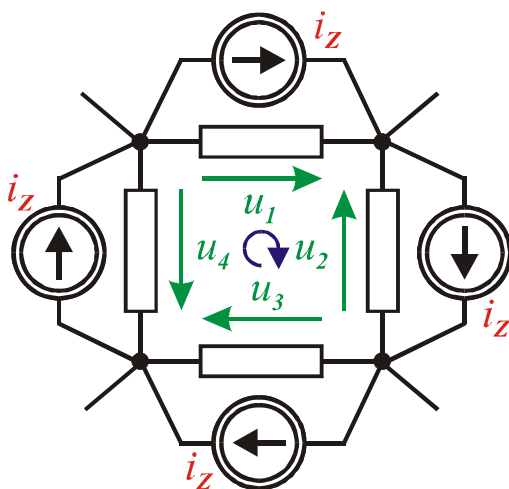


Uwaga:

- równanie wynikające z PPK dla przykładowo wyróżnionego węzła nie ulega zmianie po włączeniu źródeł napięciowych,
- równanie napięciowe dla dowolnie wybranego oczka, w którym wystąpi wyróżniony węzeł, będzie dodatkowo zawierało dwa napięcia u_0 o przeciwnych znakach.

II twierdzenie Vaschy'ego

W obwodzie rozgałęzionym rozptyw prądów nie ulegnie zmianie, jeżeli do każdej gałęzi wybranego oczka włączy się równolegle idealne, jednakowe o tym samym zwrocie względem obiegu oczka, źródła prądu.



Uwaga:

- równania wynikające z PPK dla każdego z węzłów przykładowo rozpatrywanego oczka, będą zawierały dodatkowo dwa prądy i_z o przeciwnych znakach.
- równanie napięciowe przykładowo wybranego oczka nie ulegnie zmianie po włączeniu idealnych źródeł prądowych.

3.5. ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI OBWODÓW

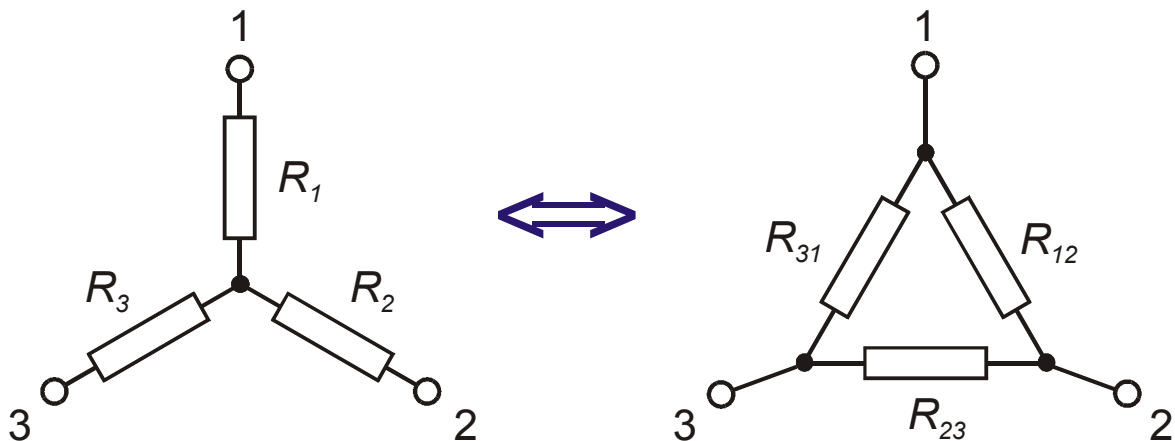
Często pożądaną rzeczą jest:

- **zredukowanie** obwodu do prostszej postaci (bardziej zwartej) lub
- **przekształcenie** obwodu do innej postaci,

które jest równoważne z obwodem wyjściowym.

Dwa układy są równoważne z punktu widzenia ich zacisków, jeżeli zależności między napięciami i prądami związanymi z tymi zaciskami są w obu układach identyczne

Przykład: transfiguracja trójkątów pasywnych

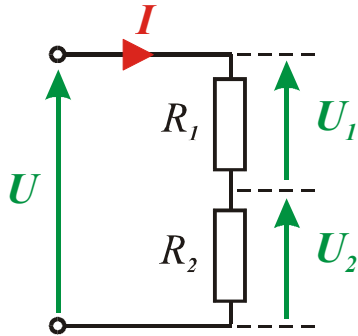


Dany trójkąt szukamy gwiazdy	Dana gwiazda szukamy trójkąta
$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$
$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$
$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$

3.6. DZIELNIKI OPOROWE

➤ DZIELNIK NAPIĘCIA

Dzielnik napięciowy jest układem dwóch rezystorów połączonych szeregowo



$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

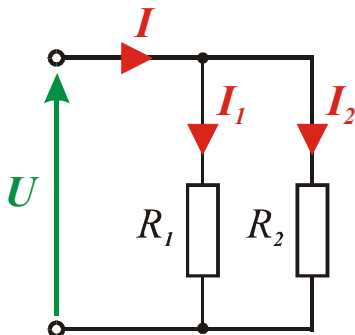
$$U_1 = R_1 I, \quad U_2 = R_2 I$$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U, \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

$$U_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} U, \quad U_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} U$$

➤ DZIELNIK PRĄDU

Dzielnik prądowy jest układem dwóch rezystorów połączonych równolegle



$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I, \quad I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I$$