6. OBWODY LINIOWE PRĄDU SINUSOIDALNEGO

6.1. SYGNAŁY HARMONICZNE

W grupie przebiegów okresowych szczególne znaczenie mają sygnały harmoniczne, tzn. cosinusoidalne i sinusoidalne. Ponieważ jednak

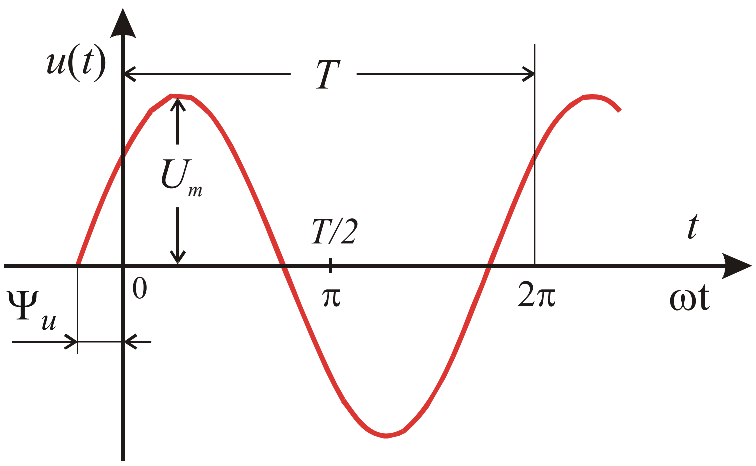
$$\sin(\omega t + \pi/2) = \cos \omega t\,,$$

nazwiemy je ogólnie **sinusoidalnymi** (sinusoidalnie-zmiennymi).

Sygnałami harmonicznymi nazywamy sygnały, których przebieg jest sinusoidalną funkcją czasu

Załóżmy, że rozpatrujemy sygnał sinusoidalny w postaci napięcia:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \tag{6.1}$$



W czasie odpowiadającym jednemu okresowi faza napięcia zmienia się o 2π, tzn. $\omega T = 2\pi$. Na rys. na osi odciętych oznaczono skalę czasu i skalę kątową.

gdzie:
- $u(t)$ - wartość chwilowa napięcia;
- U_m - wartość maksymalna napięcia (nazywana **amplitudą**);
- Ψ_u - początkowy kąt fazowy, faza początkowa napięcia w chwili $t = 0$;
- $\omega t + \Psi_u$ - kąt fazowy, faza napięcia w chwili t;
- $\omega = 2\pi f$ - **pulsacja** (częstotliwość kątowa) mierzona w rad/s;
- $f = 1/T$ - **częstotliwość** mierzona w Hz, będąca odwrotnością okresu.

Wartość średnia półokresowa napięcia sinusoidalnego wynosi zgodnie ze wzorem (1.6)

$$U_{śr} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} U_m \sin\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}U_m \approx 0{,}637\,U_m \qquad (6.2)$$

Wartość skuteczna napięcia sinusoidalnego jest równa wg. (1.8)

$$\boxed{U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} u^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} U_m^2 \sin^2\omega t\,dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 U_m} \qquad (6.3)$$

Oznacza to, że równanie opisujące napięcie harmoniczne możemy przedstawić jako

$$\boxed{u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \Psi_u)} \qquad (6.4)$$

6.2. SYGNAŁ WYKŁADNICZY

Funkcja wykładnicza pełni wyjątkową rolę, ponieważ

- **każdy sygnał występujący w praktyce może być zawsze wyrażony w postaci sumy funkcji wykładniczych**;
- **w przypadku obwodów liniowych odpowiedź obwodu na wymuszenie wykładnicze jest także wykładnicza**.

Przyjmijmy, że sygnał wykładniczy ma postać:

$$x(t) = A e^{st} \quad \text{dla} \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{6.5}$$

Współczynnik s występujący w wykładniku jest zespolony

$$s = \sigma + j\omega \tag{6.6}$$

a zatem

$$x(t) = A e^{(\sigma + j\omega)t} = A e^{\sigma t} e^{j\omega t} \tag{6.7}$$

Rozpatrzmy szczególne przypadki w zależności od wartości s.

1. Jeżeli s jest liczbą rzeczywistą (tzn. $\omega = 0$) wtedy

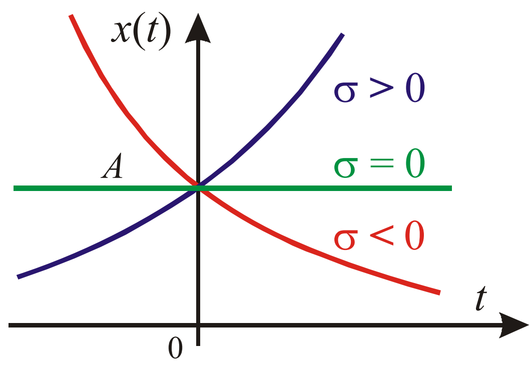
$$x(t) = A e^{\sigma t}$$

i ma charakter zależny od wartości σ

a) gdy $\boldsymbol{\sigma < 0}$, sygnał $x(t)$ ma charakter monotonicznie malejącej funkcji czasu;

b) gdy $\boldsymbol{\sigma = 0}$, sygnał $x(t)$ jest sygnałem stałym o wartości A;

c) gdy $\boldsymbol{\sigma > 0}$, sygnał $x(t)$ ma charakter monotonicznie rosnącej funkcji czasu.



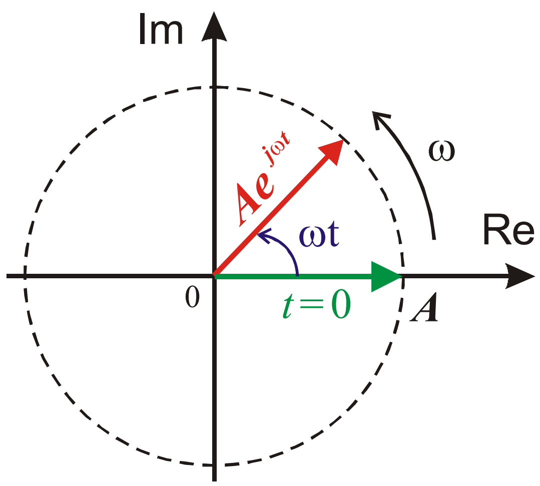
2. Jeżeli s jest liczbą urojoną (tzn. $\sigma = 0$) wtedy

$$x(t) = A e^{j\omega t}$$

sygnał $x(t)$ może być interpretowany na płaszczyźnie zmiennej zespolonej za pomocą tzw. ***wektora wirującego*** obracającego się z prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Położenie tego wektora na płaszczyźnie w danej chwili t określone jest za pomocą kąta ωt.

Czynnik $e^{j\omega t}$ spełnia rolę ***operatora obrotu***,

natomiast A jest ***modułem wektora***.



Uwzględniając wzór Eulera

$$e^{j\omega} = \cos \omega t + j \sin \omega t \tag{6.8}$$

można wektor wirujący wyrazić za pomocą dwóch składowych

$$x(t) = A e^{j\omega} = A \cos \omega t + j\, A \sin \omega t \tag{6.9}$$

Część rzeczywista wektora wirującego przedstawia sygnał o charakterze cosinusoidalnym

$$\mathrm{Re}\left[A e^{j\omega t}\right] = A \cos \omega t \tag{6.10}$$

Część urojona wektora wirującego przedstawia sygnał o charakterze sinusoidalnym

$$\boxed{\mathrm{Im}\left[A e^{j\omega t}\right] = A \sin \omega t} \tag{6.11}$$

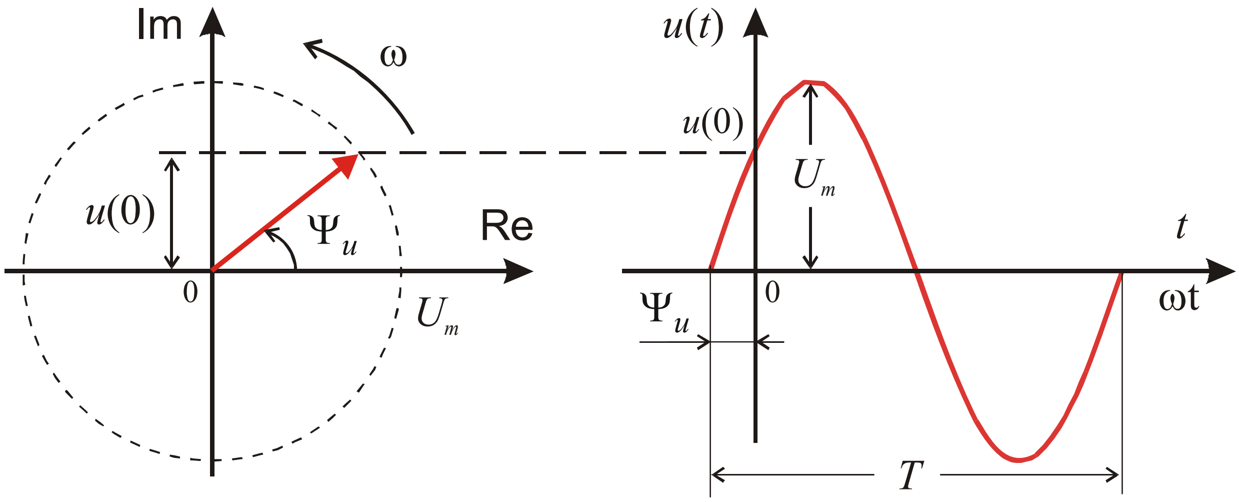
Wynika stąd, że najczęściej spotykane przebiegi wielkości elektrycznych stanowią szczególne przypadki sygnału o charakterze wykładniczym.

6.3. OPIS SYMBOLICZNY SYGNAŁU HARMONICZNEGO

Rozpatrzmy ponownie sygnał sinusoidalny w postaci napięcia (6.1):

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$$

Związek pomiędzy wektorem wirującym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej a rozpatrywanym sygnałem sinusoidalnym można następująco interpretować graficznie



Wartość chwilowa napięcia w chwili $t = 0$ wynosi

$$u(0) = U_m \sin \Psi_u \tag{6.12}$$

W chwili tej wektor wirujący o amplitudzie U_m jest nachylony względem osi liczb rzeczywistych pod kątem Ψ_u. Rzut tego wektora na oś liczb urojonych wynosi $u(0)$, czyli **wartość chwilowa sygnału sinusoidalnego jest równa rzutowi wektora wirującego na oś liczb urojonych.**

Analitycznie można to ująć, zgodnie z zależnością (6.11), następująco:
dla każdej chwili t

$$\boxed{u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) = \mathrm{Im}\left[U_m e^{j(\omega t + \Psi_u)}\right] = \mathrm{Im}[\underline{u}(t)]} \tag{6.13}$$

Sygnał sinusoidalny:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \Psi_u)$$

(rzeczywista) wartość chwilowa — $u(t)$

amplituda (wartość max.) — U_m

wartość skuteczna — U

posiada następującą **POSTAĆ SYMBOLICZNĄ** (symboliczną wartość chwilową)

$$\underline{u}(t) = U_m\, e^{j(\omega t + \Psi_u)} = \underbrace{U_m\, e^{j\Psi_u}}_{\underline{U}_m}\, e^{j\omega t} = \sqrt{2}\, \underbrace{U\, e^{j\Psi_u}}_{\underline{U}}\, e^{j\omega t} \qquad (6.14)$$

$\underline{U}_m$ — **symboliczna amplituda** /postać zespolona amplitudy/ /wskaz amplitudy/

$\underline{U}$ — **symboliczna wartość skuteczna** */wskaz wartości skutecznej/*

Czyli:

$$\underline{u}(t) = U_m\, e^{j(\omega t + \Psi_u)} = \underline{U}_m\, e^{j\omega t} = \sqrt{2}\, \underline{U}\, e^{j\omega t} \qquad (6.15)$$

UWAGI:

- nie zachodzi równość $u(t) \neq \underline{u}(t)$ tylko odpowiedniość $u(t) \mathrel{\hat{=}} \underline{u}(t)$
- natomiast: $$u(t) = \frac{\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)}{2j} = \mathrm{Im}\left[\underline{u}(t)\right] \qquad (6.16)$$

- **Metoda symboliczna zapisu przebiegów sinusoidalnych pozwala traktować je jako przebiegi wykładnicze.**

PRZYKŁAD 6.1

Dla (RZECZYWISTEJ) **wartości chwilowej** napięcia

$$u(t) = 282\sin\left(314\,t + 30^o\right)V$$

Amplituda: $U_m = 282\,V$

Wartość skuteczna:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{282}{1{,}41} = 200\,V$$

Pulsacja $\omega = 314\,\frac{rad}{s}$

ponieważ $\omega = 2\pi f$

stąd częstotliwość $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\cdot 3{,}14} = 50\,[Hz]$

Jeśli $f = \frac{1}{T}$ zatem okres $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\,[s]$

Faza początkowa $\Psi_u = 30^o$

inaczej $\Psi_u = 30^o\,\frac{\pi}{180^o} = 0{,}524\,rad$

Jej **SYMBOLICZNA wartość chwilowa** wynosi:

$$\underline{u}(t) = U_m\,e^{j(\omega t + \Psi_u)} = 282\,e^{j\left(314t + 30^o\right)}\,V$$

Symboliczna amplituda: $\underline{U}_m = U_m\,e^{j\Psi_u} = 282\,e^{j30^o}\,V$

Symboliczna wartość skuteczna: $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\,e^{j\Psi_u} = U\,e^{j\Psi_u} = 200\,e^{j30^o}\,V$

6.4. ZWIĄZKI POMIĘDZY NAPIĘCIEM I PRĄDEM DLA ELEMENTÓW R, L, C

➢ REZYSTOR

Przy występowaniu prądu harmonicznego

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \tag{6.17}$$

w rezystorze o rezystancji R, na jego zaciskach pojawi się napięcie

$$u(t) = R\,i(t) = R\,I_m \sin(\omega t + \Psi_i) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \tag{6.18}$$

przy czym amplituda przebiegu napięcia

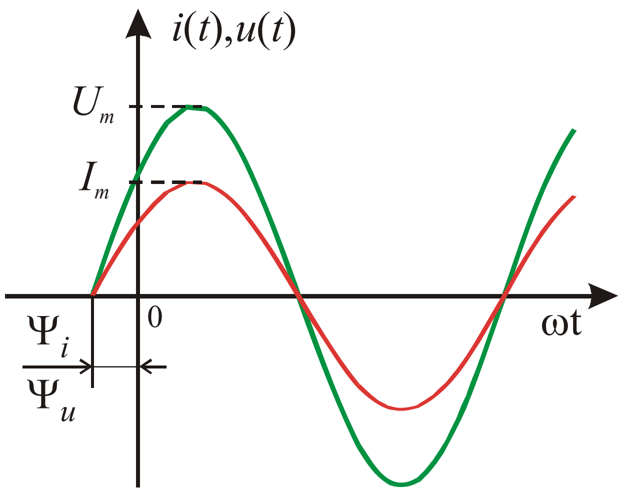
$$U_m = R\,I_m \tag{6.19}$$

a faza początkowa

$$\Psi_u = \Psi_i \tag{6.20}$$

Czyli przesunięcie fazowe φ między przebiegami $u(t)$ i $i(t)$ wynosi zero.

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = 0 \tag{6.21}$$



Napięcie na zaciskach idealnego rezystora jest w fazie z prądem

W POSTACI SYMBOLICZNEJ

Symboliczna wartość chwilowa prądu

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m\, e^{j\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \underline{I}_m = I_m\, e^{j\Psi_i} \tag{6.22}$$

napięcia

$$\underline{u}(t) = R\,\underline{i}(t) = R\,\underline{I}_m\, e^{j\omega t} = \underline{U}_m\, e^{j\omega t} \tag{6.23}$$

Zatem

$$\underline{U}_m = R\,\underline{I}_m \tag{6.24}$$

co oznacza, że zgodnie z (6.15)

$$\boxed{\underline{U} = R\,\underline{I}} \qquad \boxed{\underline{I} = G\,\underline{U}} \tag{6.25}$$

Przedstawiając symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy

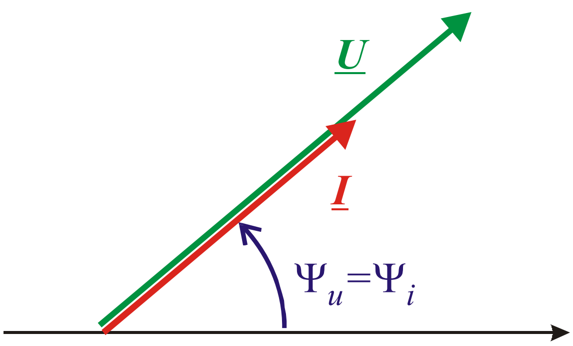
$$U\, e^{j\Psi_u} = R\, I\, e^{j\Psi_i} \tag{6.26}$$

Z przyrównania modułów w wyrażeniu (6.26) znajdujemy

$$\boxed{U = R\, I} \qquad \boxed{I = G\, U} \tag{6.27}$$

a z przyrównania argumentów $\boxed{\Psi_u = \Psi_i}$ (6.28)

Pomnożenie wskazu $\underline{I}$ przez R powoduje *wydłużenie/skrócenie* tego wskazu R razy. Wobec tego wskaz napięcia $\underline{U} = R\,\underline{I}$ znajduje się na tej samej prostej co wskaz $\underline{I}$



➢ CEWKA INDUKCYJNA

Przy przepływie prądu w cewce idealnej o indukcyjności L napięcie na jej zaciskach wyraża zależność (2.17)

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Przyjmując, że w cewce występuje prąd harmoniczny

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \tag{6.29}$$

napięcie na cewce wynosi

$$u(t) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \Psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \tag{6.30}$$

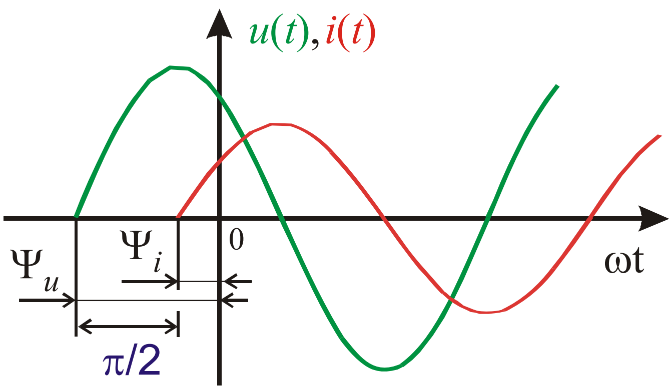
Z powyższej zależności wynika, że amplituda przebiegu napięcia

$$U_m = \omega L I_m \tag{6.31}$$

natomiast faza początkowa $$\Psi_u = \Psi_i + \frac{\pi}{2} \tag{6.32}$$

Czyli przesunięcie fazowe φ między przebiegami $u(t)$ i $i(t)$ cewki indukcyjnej wynosi:

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = \frac{\pi}{2} \tag{6.33}$$



Napięcie na zaciskach idealnej cewki wyprzedza prąd o 90°

Dla cewki indukcyjnej - symboliczna wartość chwilowa prądu

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\Psi_i} \tag{6.34}$$

napięcia

$$\underline{u}(t) = L\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega L\,\underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \tag{6.35}$$

Zatem

$$\underline{U}_m = j\omega L\,\underline{I}_m \tag{6.36}$$

co oznacza, że

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L\,\underline{I}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\underline{I} = \frac{1}{j\omega L}\underline{U}} \tag{6.37}$$

Przedstawiając symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy

$$U e^{j\Psi_u} = \omega L\, I\, e^{j\left(\Psi_i + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{6.38}$$

Z przyrównania modułów w wyrażeniu (6.38) znajdujemy

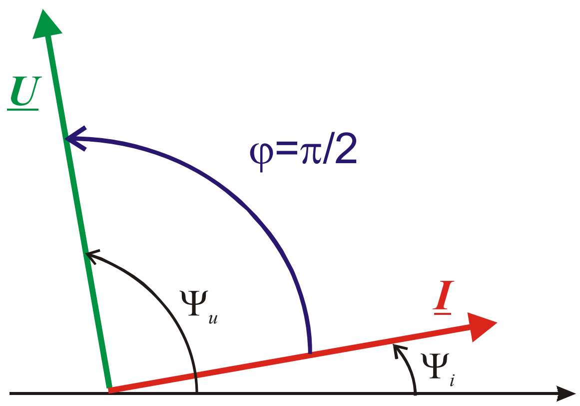
$$\boxed{U = \omega L\, I = X_L I} \qquad \boxed{I = \frac{1}{\omega L}U = B_L U} \tag{6.39}$$

reaktancja indukcyjna (X_L) ***susceptancja indukcyjna*** (B_L)

a z przyrównania argumentów $\boxed{\Psi_u = \Psi_i + \frac{\pi}{2}}$ (6.40)

Pomnożenie wskazu $\underline{I}$ przez $j\omega L$ powoduje *wydłużenie/skrócenie* wskazu $\underline{I}$ i jego obrót o 90° „w przód"

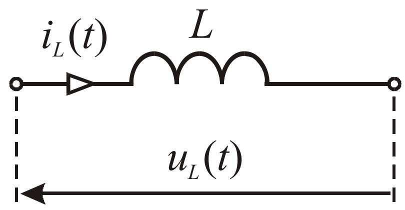
$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = \frac{\pi}{2}$$



PRZYKŁAD 6.2

Obliczyć **rzeczywistą wartość chwilową prądu** płynącego przez cewkę o indukcyjności L=0,2H, gdy

$$u_L(t) = 141\sin\left(100t + 40^o\right)V$$



Symboliczna amplituda napięcia: $\underline{U}_{Lm} = 141 e^{j40^o} V$

Symboliczna wartość skuteczna napięcia: $\underline{U}_L = \dfrac{141}{\sqrt{2}} e^{j40^o} = 100\, e^{j40^o} \left[V\right]$

Reaktancja indukcyjna: $X_L = \omega L = 100 \cdot 0{,}2 = 20\left[\Omega\right]$

Susceptancja indukcyjna: $B_L = \dfrac{1}{\omega L} = \dfrac{1}{X_L} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05\left[S\right]$

Zgodnie z (6.37)

$$\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\underline{U}_L = \frac{\underline{U}_L}{jX_L} = \frac{100\, e^{j40^o}}{j20} = \frac{100\, e^{j40^o}}{20\, e^{j90^o}} = \frac{100}{20} e^{j\left(40^o - 90^o\right)} = 5\, e^{-j50^o}$$

inaczej

$$\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\underline{U}_L = -j\frac{1}{\omega L}\underline{U}_L = -jB_L\underline{U}_L =$$

$$= -j0{,}05 \cdot 100\, e^{j40^o} = 0{,}05\, e^{-j90^o} \cdot 100\, e^{j40^o} = 5\, e^{j\left(-90^o + 40^o\right)} = 5\, e^{-j50^o}$$

Czyli symboliczna amplituda prądu: $\underline{I}_{Lm} = 5\sqrt{2}\, e^{-j50^o}\left[A\right]$

Stąd **rzeczywista wartość chwilową prądu**

$$i_L(t) = 5\sqrt{2}\sin\left(100t - 50^o\right)A$$

➢ KONDENSATOR

Gdy istnieje napięcie $u(t)$ na zaciskach idealnego kondensatora o pojemności C, to prąd płynący przez kondensator opisuje zależność (2.13)

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

Przyjmując, że na zaciskach kondensatora występuje napięcie

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \tag{6.41}$$

prąd płynący przez kondensator wynosi

$$i(t) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \tag{6.42}$$

Z powyższej zależności wynika, że amplituda przebiegu prądu

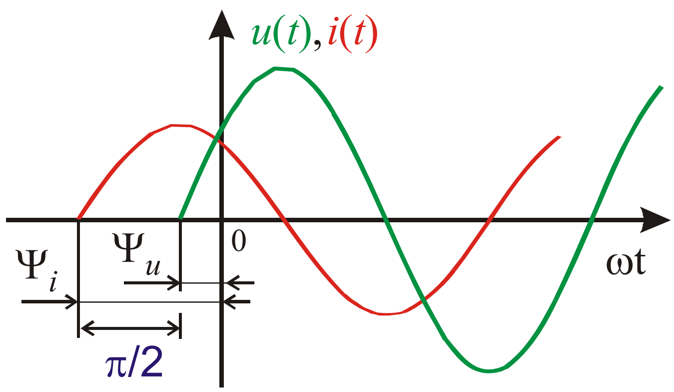
$$I_m = \omega C U_m \tag{6.43}$$

natomiast faza początkowa

$$\Psi_i = \Psi_u + \frac{\pi}{2} \tag{6.44}$$

Zatem przesunięcie fazowe φ między przebiegami $u(t)$ i $i(t)$ kondensatora wynosi:

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = -\frac{\pi}{2} \tag{6.45}$$



Prąd płynący przez idealny kondensator wyprzedza napięcie o 90°

Dla kondensatora - symboliczna wartość chwilowa napięcia

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m \, e^{j\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \underline{U}_m = U_m \, e^{j\Psi_i} \tag{6.46}$$

prądu

$$\underline{i}(t) = C\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = j\omega C \, \underline{U}_m \, e^{j\omega t} = \underline{I}_m \, e^{j\omega t} \tag{6.47}$$

Zatem

$$\underline{I}_m = j\omega C \, \underline{U}_m \tag{6.48}$$

co oznacza, że

$$\boxed{\underline{I} = j\omega C \, \underline{U}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}} \tag{6.49}$$

Przedstawiając symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy

$$I \, e^{j\Psi_i} = \omega C \, U \, e^{j\left(\Psi_u + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{6.50}$$

Z przyrównania modułów, znajdujemy

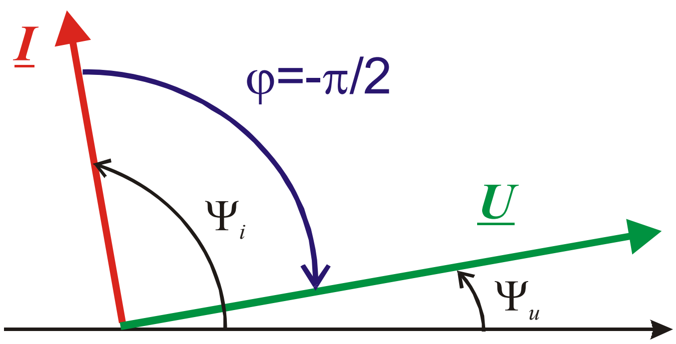
$$\boxed{I = \omega C \, U = B_C U} \qquad \boxed{U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I} \tag{6.51}$$

susceptancja pojemnościowa ***reaktancja pojemnościowa***

a z przyrównania argumentów $\boxed{\Psi_i = \Psi_u + \dfrac{\pi}{2}}$ (6.52)

Pomnożenie wskazu $\underline{I}$ przez $1/j\omega C$ powoduje *wydłużenie/skrócenie* wskazu $\underline{I}$ i jego obrót o 90° „wstecz”

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = -\frac{\pi}{2}$$



6.5. PODSTAWOWE PRAWA W POSTACI ZESPOLONEJ

Prawo Ohma

Symboliczna wartość skuteczna napięcia $\underline{U}$ dwójnika równa się iloczynowi impedancji dwójnika $\underline{Z}$ i wartości skutecznej prądu $\underline{I}$ w nim płynącego:

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}} \tag{6.53}$$

Impedancja (*opór zespolony*) $\underline{Z}$ charakteryzuje przewodnictwo elektryczne dwójnika przy przepływie prądu sinusoidalnego.

Podstawiając w (6.53) symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U\,e^{j\Psi_u}}{I\,e^{j\Psi_i}} = \frac{U}{I}\,e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} \tag{6.54}$$

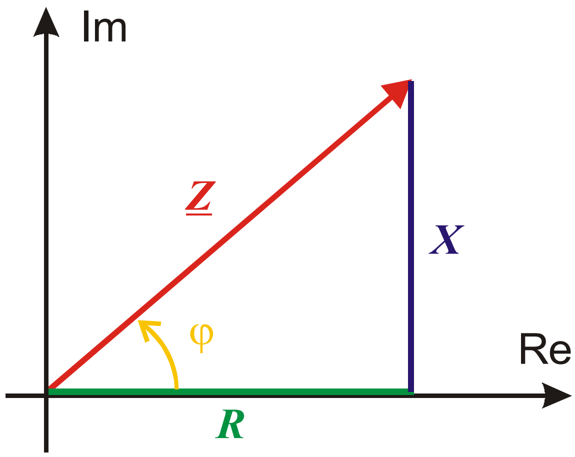
czyli:

$$Z = \frac{U}{I}, \quad \arg \underline{Z} = (\Psi_u - \Psi_i) = \varphi \tag{6.55}$$

Zatem

$$\boxed{\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi}} \qquad \boxed{\underline{Z} = \underbrace{R}_{\text{rezystancja}} + j\underbrace{X}_{\text{reaktancja}}} \tag{6.56}$$

Impedancję $\underline{Z}$ można przedstawić geometrycznie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej za pomocą **trójkąta impedancji**.



Prawo Ohma można także przedstawić następująco:

> **Symboliczna wartość skuteczna prądu $\underline{I}$ płynącego przez dwójnik równa się iloczynowi admitancji dwójnika $\underline{Y}$ i wartości skutecznej napięcia $\underline{U}$ na jego zaciskach:**

$$\boxed{\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}} \tag{6.57}$$

Admitancja (*przewodność zespolona* – jej jednostką jest simens S) dwójnika równa się odwrotności jego impedancji:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \tag{6.58}$$

co oznacza, że

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z\,e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z}\,e^{-j\varphi} \tag{6.59}$$

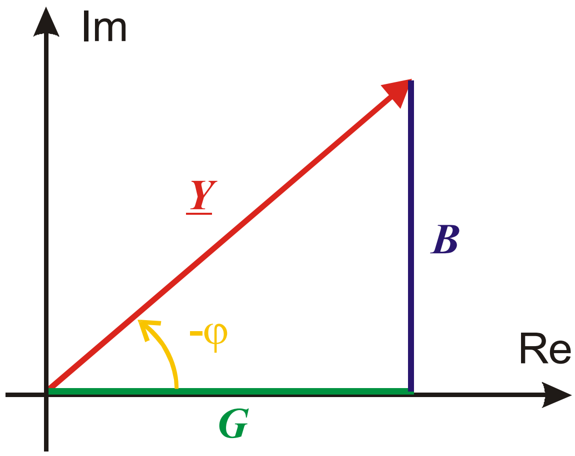
czyli:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}, \qquad \arg \underline{Y} = -\varphi \tag{6.60}$$

Zatem

$$\boxed{\underline{Y} = Y\,e^{-j\varphi}} \qquad \boxed{\underline{Y} = \underbrace{G}_{\text{konduktancja}} + j\,\underbrace{B}_{\text{susceptancja}}} \tag{6.61}$$

Admitancję $\underline{Y}$ można przedstawić geometrycznie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej za pomocą **trójkąta admitancji**.



I prawo Kirchhoffa - prądowe prawo Kirchhoffa (PPK)

Algebraiczna suma symbolicznych wartości chwilowych prądów *$\underline{i}_n(t)$* we wszystkich gałęziach dołączonych do jednego, dowolnie wybranego węzła obwodu jest w każdej chwili czasu równa zeru:

$$\boxed{\underset{t}{\Lambda} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{i}_k(t) = 0} \tag{6.62}$$

gdzie: $\lambda_k = \pm 1$ („+" jeśli prąd elektryczny ma zwrot do węzła; „-" jeśli zwrot jest przeciwny, od węzła)

Jest ono także słuszne dla symbolicznych amplitud (6.62a) oraz symbolicznych wartości skutecznych (6.62b) odpowiednich prądów:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{I}_{m\,k} = 0 \tag{6.62a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{I}_k = 0 \tag{6.62b}$$

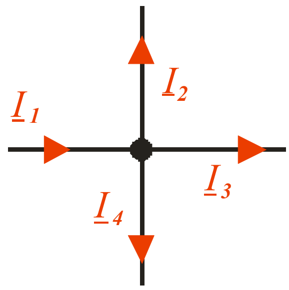
PRZYKŁAD 6.3

Znane są symboliczne wartości skuteczne prądów

$$\underline{I}_1 = 1\, e^{\,j0^o}$$

$$\underline{I}_2 = 3\, e^{\,j90^o}$$

$$\underline{I}_3 = 2\sqrt{2}\, e^{-j45^o}$$



Obliczyć prąd $\underline{I}_4$

Zgodnie z (6.62b) : $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = 0$

zatem $\underline{I}_4 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 1\, e^{\,j0^o} - 3\, e^{\,j90^o} - 2\sqrt{2}\, e^{-j45^o}$

$$= 1 - j3 - (2 - j2) = 1 - j3 - 2 + j2 = -1 - j1$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-j135^o}$$

II prawo Kirchhoffa - napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK)

Algebraiczna suma symbolicznych wartości chwilowych napięć $\underline{u}_n(t)$ na wszystkich elementach, tworzących dowolnie wybrane oczko obwodu jest w każdej chwili czasu równa zeru:

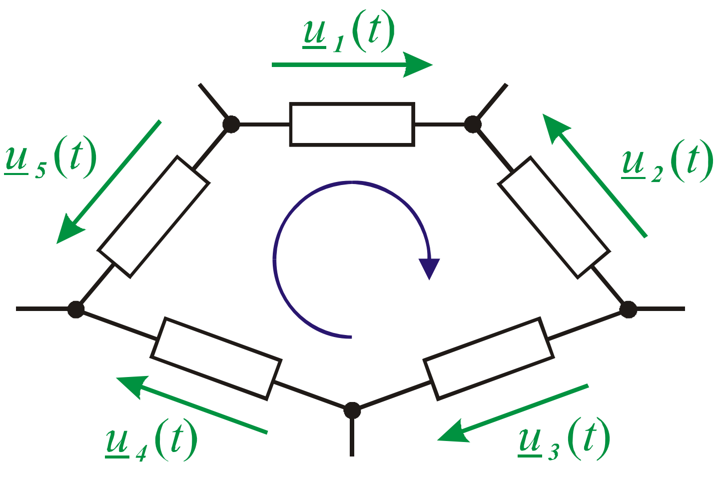
$$\boxed{\underset{t}{\Lambda}\sum_{k=1}^{n} \nu_k \underline{u}_k(t) = 0} \qquad (6.63)$$

gdzie: $\nu_k = \pm 1$ („+" jeśli zwrot napicia jest zgodny z przyjętym za dodatni kierunkiem obiegu oczka; „-" jeśli jest przeciwny)

Jest ono także słuszne dla symbolicznych amplitud (6.63a) oraz symbolicznych wartości skutecznych (6.63b) odpowiednich napięć

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k \underline{U}_{m\,k} = 0 \qquad (6.63a) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} \nu_k \underline{U}_k = 0 \qquad (6.63b)$$

PRZYKŁAD 6.4



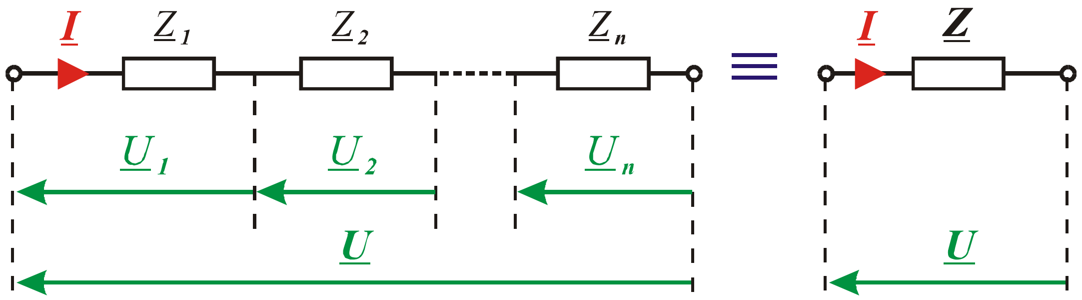
Dla (6.63) $\underline{u}_1(t) - \underline{u}_2(t) + \underline{u}_3(t) + \underline{u}_4(t) - \underline{u}_5(t) = 0$

Dla (6.63a) $\underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m2} + \underline{U}_{m3} + \underline{U}_{m4} - \underline{U}_{m5} = 0$

Dla (6.63b) $\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4 - \underline{U}_5 = 0$

6.6. POŁĄCZENIA DWÓJNIKÓW

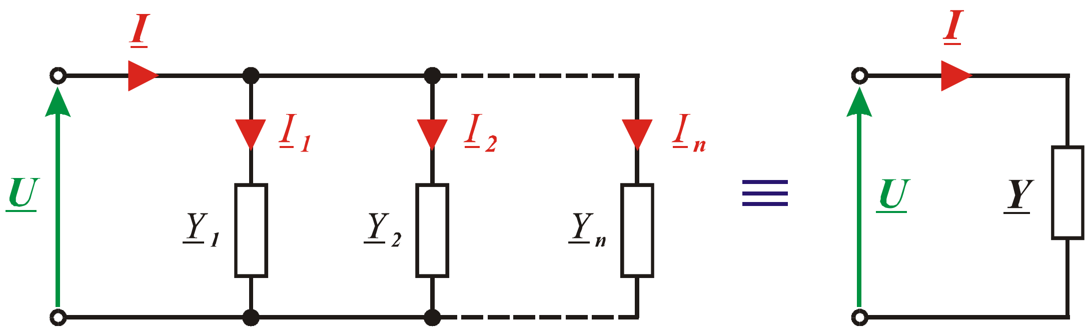
➢ Połączenie SZEREGOWE *n* dwójników



$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \ldots + \underline{U}_n = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \ldots + \underline{Z}_n \underline{I} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad (6.64)$$

$$\boxed{\underline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k} \quad (6.65)$$

➢ Połączenie RÓWNOLEGŁE *n* dwójników

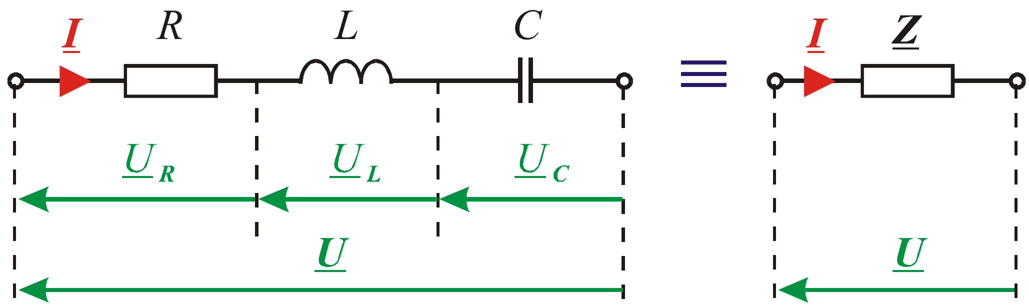


$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \ldots + \underline{I}_n = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} + \ldots + \underline{Y}_n \underline{U} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{U} = \underline{Y}\,\underline{U} \quad (6.66)$$

$$\boxed{\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}} \quad (6.67)$$

6.7. POŁĄCZENIA ELEMENTÓW R, L C

➢ Obwód SZEREGOWY RLC



	Wartość impedancji elementu	Wartość napięcia na elemencie
R	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{U}_R = R\,\underline{I}$
L	$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$	$\underline{U}_L = j\omega L\,\underline{I} = jX_L\,\underline{I}$
C	$\underline{Z}_C = -j\dfrac{1}{\omega C} = -jX_C$	$\underline{U}_C = \dfrac{1}{j\omega C}\underline{I} = -j\dfrac{1}{\omega C}\underline{I} = -jX_C\underline{I}$

Ponieważ

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\underline{I} = \left[R + j(X_L - X_C)\right]\underline{I} = (R + jX)\underline{I} \qquad (6.68)$$

Zatem:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad (6.69)$$

$$\arg \underline{Z} = \varphi = arctg\left(\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) = arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = arctg\left(\frac{X}{R}\right) \qquad (6.70)$$

W zależności od parametrów L i C oraz częstotliwości, reaktancja X we wzorze (6.68) $X = X_L - X_C$ może być:

a) $\boxed{X > 0}$ gdy $X_L > X_C$

wówczas $\varphi > 0$, napięcie wyprzedza prąd

obwód ma charakter indukcyjny

b) $\boxed{X = 0}$ gdy $X_L = X_C$

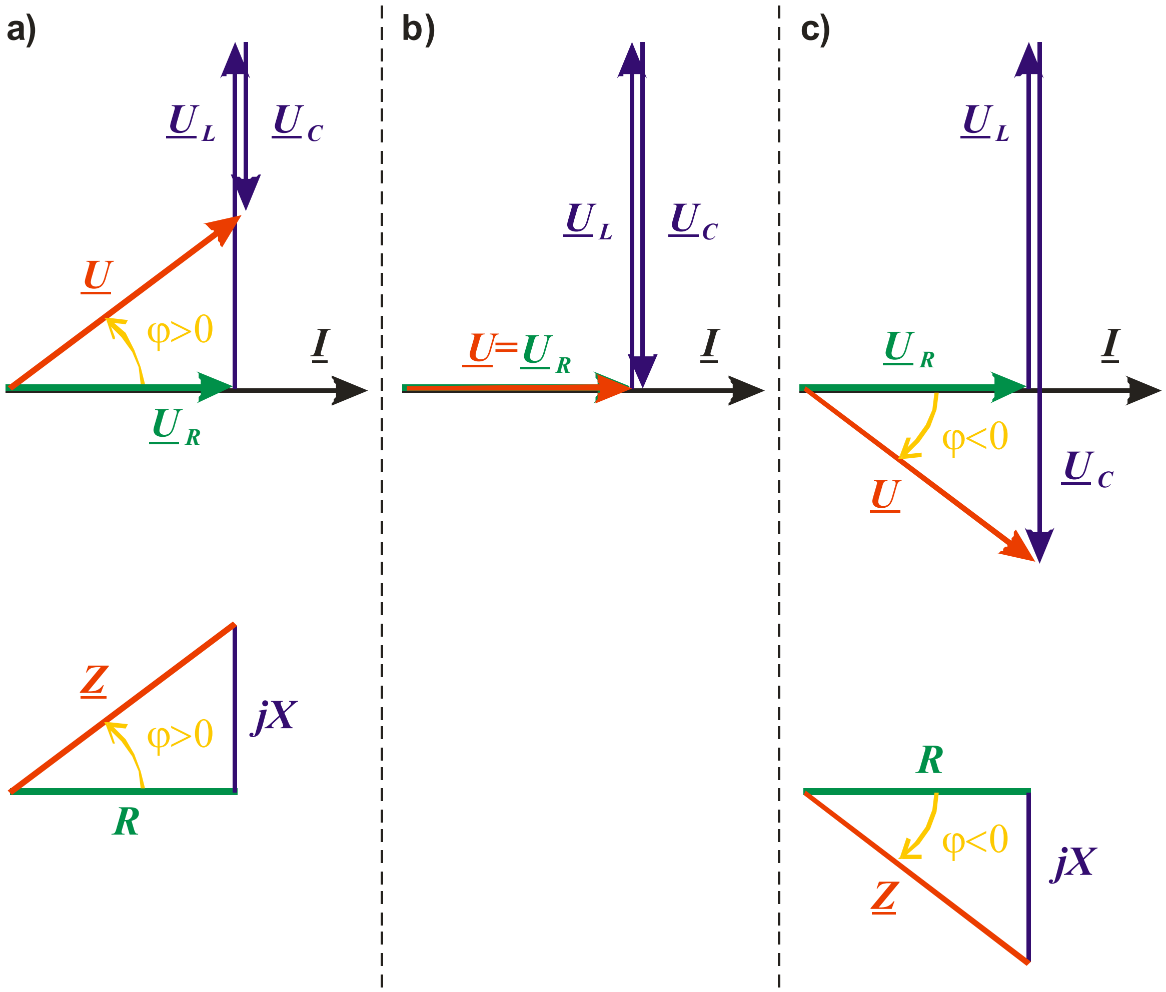
wówczas $\varphi = 0$, napięcie i prąd są w fazie

obwód ma charakter rezystancyjny

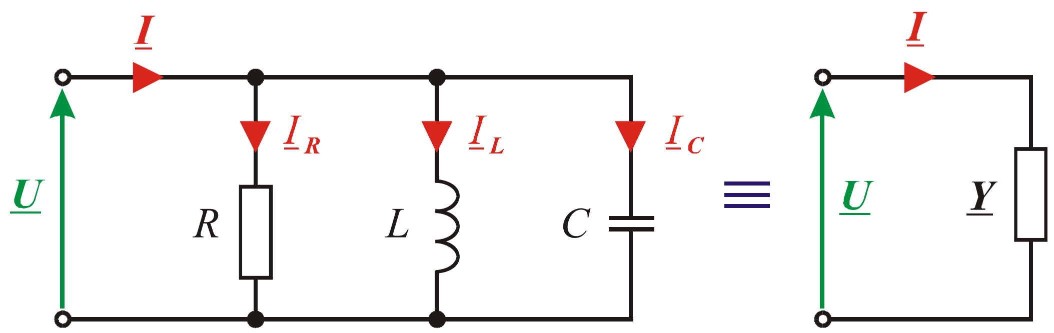
c) $\boxed{X < 0}$ gdy $X_L < X_C$

wówczas $\varphi < 0$, napięcie opóźnia się względem prądu

obwód ma charakter pojemnościowy



➢ Obwód <u>RÓWNOLEGŁY</u> RLC



	Wartość	
	admitancji elementu	prądu w elemencie
R	$\underline{Y}_R = G$	$\underline{I}_R = G\underline{U}$
L	$\underline{Y}_L = -j\dfrac{1}{\omega L} = -jB_L = -j\dfrac{1}{X_L}$	$\underline{I}_L = \dfrac{1}{j\omega L}\underline{U} = -j\dfrac{1}{\omega L}\underline{U} = -jB_L\,\underline{U}$
C	$\underline{Y}_C = j\omega C = jB_C = j\dfrac{1}{X_C}$	$\underline{I}_C = j\omega C\,\underline{U} = jB_C\,\underline{U}$

Ponieważ

$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U} = \left[G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]\underline{U} = \left[G + j\left(B_C - B_L\right)\right]\underline{U} = \left(G + jB\right)\underline{U} \quad (6.71)$$

Zatem:

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + \left(B_C - B_L\right)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (6.72)$$

$$\arg\underline{Y} = arctg\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right) = arctg\left(\frac{B_C - B_L}{G}\right) = arctg\left(\frac{B}{G}\right) \quad (6.73)$$

W zależności od parametrów L i C oraz częstotliwości, susceptancja B we wzorze (6.71) $B = B_C - B_L$ może być:

a) $\boxed{B > 0}$ gdy $B_C > B_L$

wówczas $\varphi < 0$, prąd wyprzedza napięcie

obwód ma charakter pojemnościowy

b) $\boxed{B = 0}$ gdy $B_C = B_L$

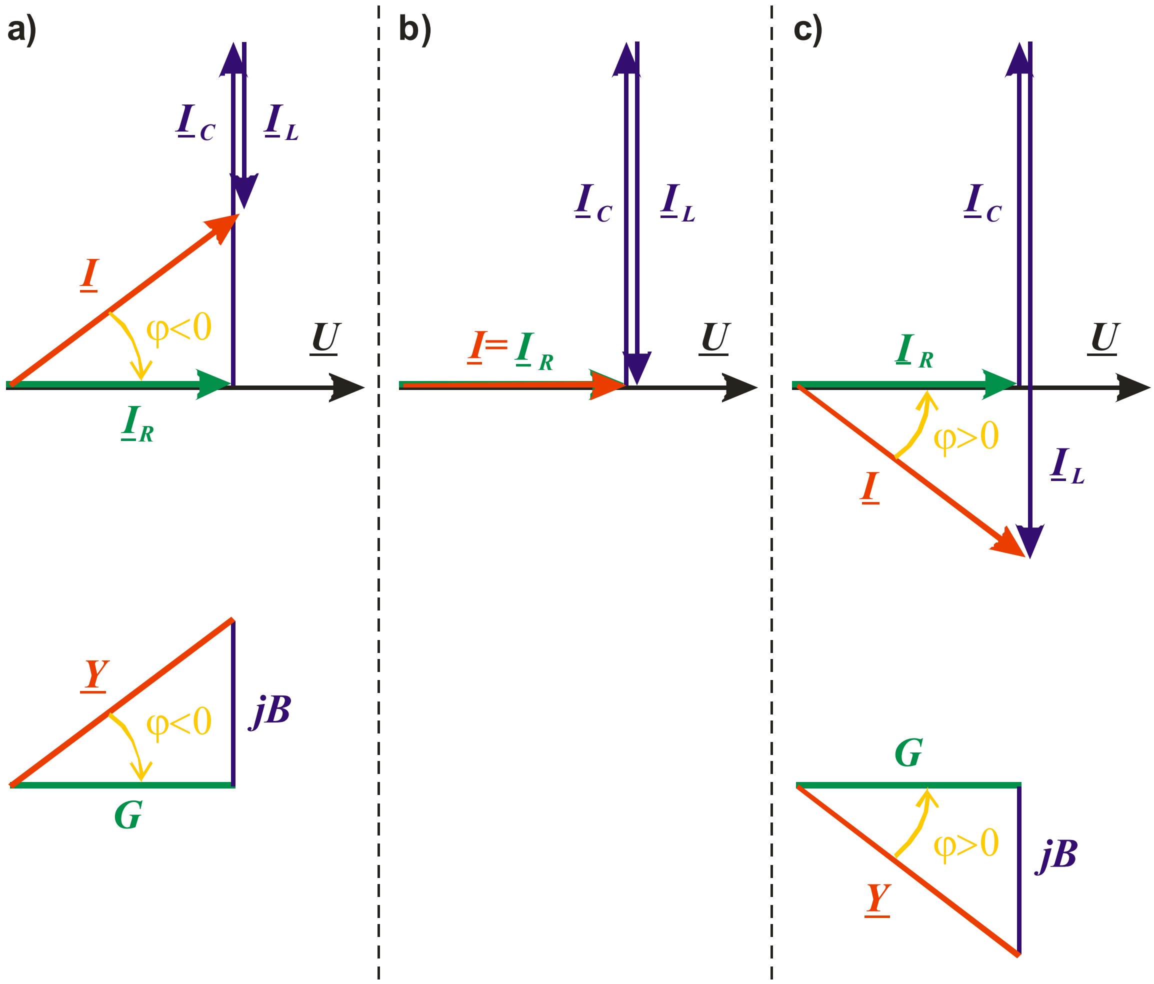
wówczas $\varphi = 0$, prąd i napięcie są w fazie

obwód ma charakter rezystancyjny

c) $\boxed{B < 0}$ gdy $B_C < B_L$

wówczas $\varphi > 0$, prąd opóźnia się względem napięcia

obwód ma charakter indukcyjny



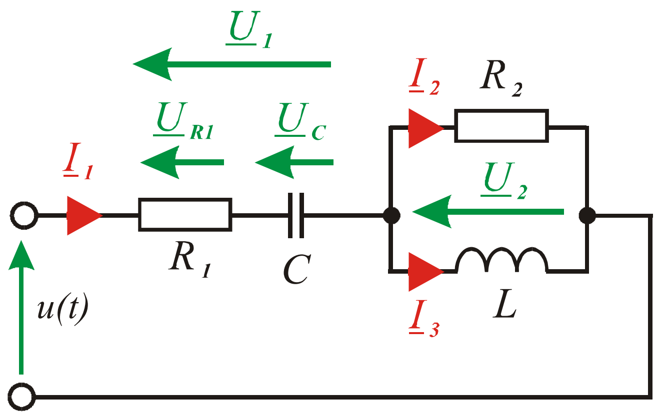
PRZYKŁAD 6.5

Obliczyć symboliczną wartość skuteczną prądu i napięcia każdego elementu obwodu – sporządzić wykres wskazowy – dane:

$u(t) = 75\sqrt{2}\sin\omega t$

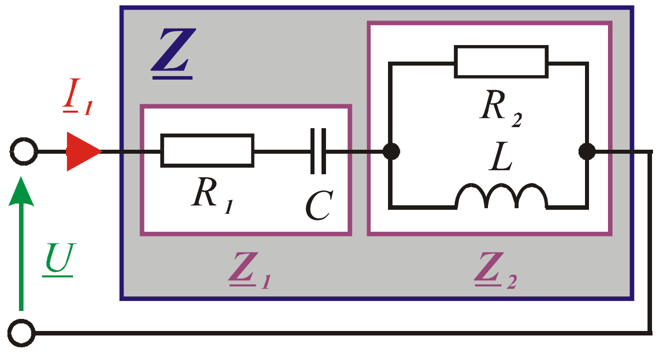
$R_1 = R_2 = X_L = 1\ \Omega$,

$X_C = 2\ \Omega$.



0) Napięcie na zaciskach obwodu $\underline{U} = 75\,e^{j\,0^o}\,V$

1) Aby obliczyć prąd $\underline{I}_1$
Wyznacza się impedancję obwodu



$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_C = 1 - j2\,[\Omega]$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2\,jX_L}{R_2 + jX_L} = 0{,}5 + j0{,}5\,[\Omega]$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 1{,}5 - j1{,}5\,[\Omega]$$

oraz korzysta z prawa Ohma: $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \dfrac{75\,e^{j\,0^o}}{1{,}5 - j1{,}5} = 25 + j25\,[A]$

2) Oblicza się napięcia na

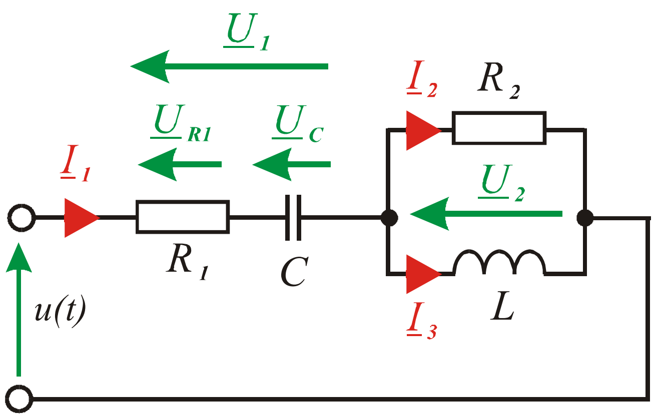
a) rezystorze R_1 : $\underline{U}_{R1} = R_1\,\underline{I}_1 = 25 + j25\,[V]$

b) kondensatorze: $\underline{U}_C = -jX_C\,\underline{I}_1 = 50 - j50\,[V]$

c) impedancji $\underline{Z}_1$: jako $\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_C$

lub $= \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 = 75 - j25\,[V]$

3) Oblicza się napięcie na impedancji $\underline{Z}_2$: $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\,\underline{I}_1 = j25\,[V]$



4) Oblicza się prądy w

a) rezystorze R_2 : $$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_2} = j25\,[A]$$

b) cewce: $$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_2}{jX_L} = 25\,[A]$$

5) Wykres wskazowy tworzy się przyjmując następującą kolejność rysowania:

1. $\underline{U}_2$
2. $\underline{I}_2$ (w fazie z $\underline{U}_2$)
3. $\underline{I}_3$ (opóźniony względem $\underline{U}_2$ o 90^o)
4. $\underline{I}_1$ (równy $\underline{I}_2+\underline{I}_3$)
5. $\underline{U}_{R1}$ (w fazie z $\underline{I}_1$)
6. $\underline{U}_C$ (opóźnione względem $\underline{I}_1$ o 90^o)
7. $\underline{U}_1$ (równe $\underline{U}_{R1}+\underline{U}_C$)
8. $\underline{U}$ (równe $\underline{U}_1+\underline{U}_2$)

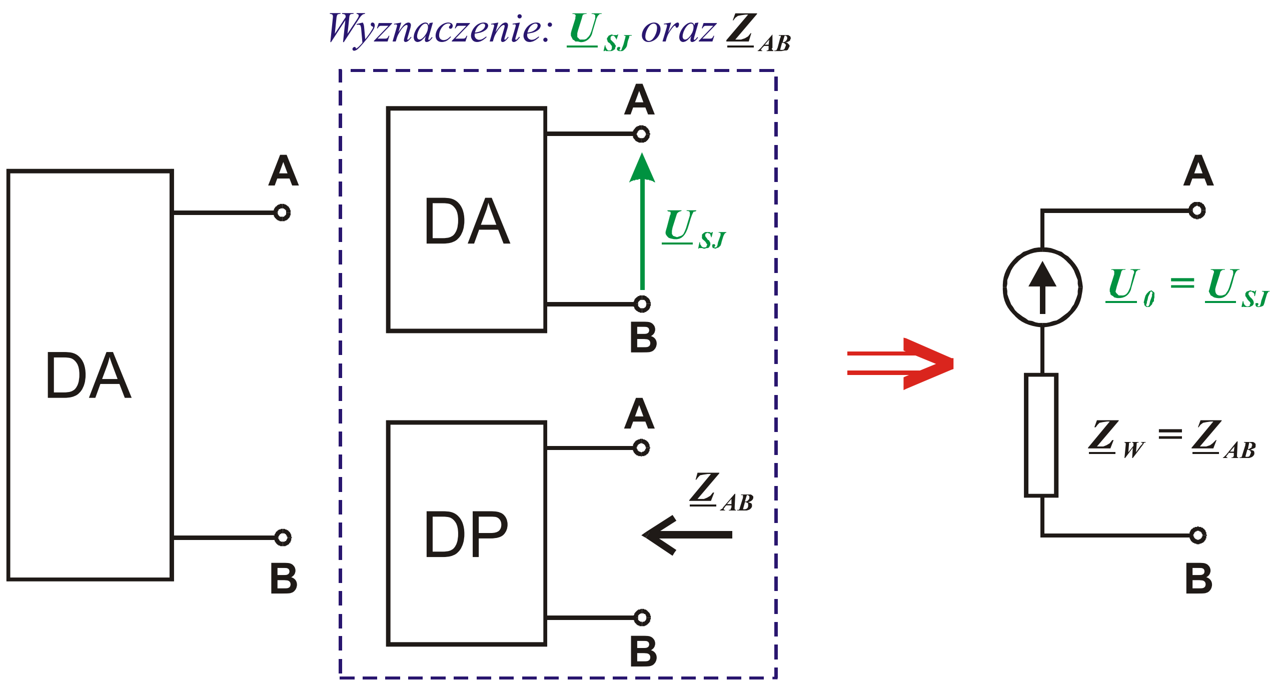
6.8. TWIERDZENIA THEVENINA I NORTONA W POSTACI SYMBOLICZNEJ

Twierdzenie Thevenina

(o zastępczym źródle/generatorze napięciowym)

Dowolny aktywny dwójnik klasy SLS można zastąpić obwodem równoważnym, złożonym z szeregowego połączenia idealnego źródła napięcia o napięciu źródłowym $\underline{U}_0$ i impedancji wewnętrznej $\underline{Z}_W$, przy czym:

- **napięcie źródłowe $\underline{U}_0$ jest równe napięciu na rozwartych zaciskach dwójnika (napięciu stanu jałowego $\underline{U}_{SJ}$)**
- **impedancja wewnętrzna $\underline{Z}_W$, jest równa impedancji zastępczej (impedancji wejściowej $\underline{Z}_{AB}$) dwójnika pasywnego (bezźródłowego) otrzymanego po wyzerowaniu w wewnętrznej strukturze dwójnika aktywnego wszystkich autonomicznych źródeł energii.**



Twierdzenie Nortona
(o zastępczym źródle/generatorze prądowym)

Dowolny aktywny dwójnik klasy SLS można zastąpić obwodem równoważnym, złożonym z równoległego połączenia idealnego źródła prądu o prądzie źródłowym $\underline{I}_Z$ i admitancji wewnętrznej $\underline{Y}_W$, przy czym:

- **prąd źródłowy $\underline{I}_Z$ jest równy prądowi płynącemu przez zwarte zaciski dwójnika (prądowi stanu zwarcia $\underline{I}_{SZ}$)**
- **admitancja wewnętrzna $\underline{Y}_W$, jest równa admitancji zastępczej (admitancji wejściowej $\underline{Y}_{AB}$) dwójnika pasywnego (bezźródłowego) otrzymanego po wyzerowaniu w wewnętrznej strukturze dwójnika aktywnego wszystkich autonomicznych źródeł energii.**