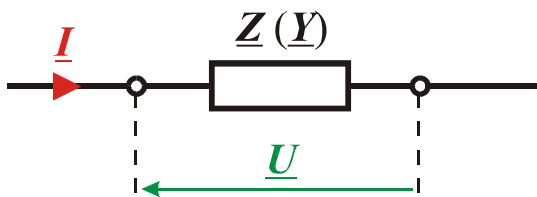


7. REZONANS W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH

7.1. ZJAWISKO REZONANSU

Obwody elektryczne, w których występuje zjawisko rezonansu nazywane są obwodami rezonansowymi lub drgającymi.

Rozpatrując bezźródłowy obwód elektryczny, przedstawiony schematycznie na rys.7.1. jako dwójnik.



$$\frac{U}{I} = \underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = G + jB$$

Rys. 7.1. Rozpatrywany dwójnik

Zjawisko rezonansu przedstawia taki stan pracy obwodu elektrycznego, przy którym reaktancja wypadkowa X lub susceptancja wypadkowa B obwodu jest równa zero

Warunkiem rezonansu jest

$$X = \text{Im}(\underline{Z}) = 0 \quad (7.1)$$

lub

$$B = \text{Im}(\underline{Y}) = 0 \quad (7.2)$$

Częstotliwość (pulsacja), przy której reaktancja wypadkowa lub susceptancja wypadkowa obwodu jest równa zero nazywana jest **częstotliwością (pulsacją) rezonansową**.

Obwód elektryczny osiąga stan rezonansu, jeśli częstotliwość doprowadzonego sygnału sinusoidalnego jest równa częstotliwości rezonansowej obwodu.

Ponieważ kąt φ przesunięcia fazowego między napięciem \underline{U} i prądem \underline{I} jest równy

- argumentowi impedancji \underline{Z} , przy czym

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} \quad (7.3)$$

lub

- argumentowi admitancji \underline{Y} wziętemu ze znakiem przeciwnym, przy czym

$$\varphi = -\arg(\underline{Y}) = -\operatorname{arctg} \frac{B}{G} ; \quad (7.4)$$

stąd

$$\varphi = 0 \quad \text{dla } X=0 \text{ lub } B=0$$

Oznacza to, że

zjawiskiem rezonansu nazywamy taki stan pracy obwodu elektrycznego, przy którym prąd i napięcie na jego zaciskach są ze sobą w fazie (a argument impedancji lub admitancji obwodu jest równy zeru)

Impedancja \underline{Z} obwodu w stanie rezonansu równa się rezystancji obwodu

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = R \quad , \quad (7.5)$$

a jego admitancja \underline{Y} , jest równa konduktancji G

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}(\underline{Y}) = G \quad . \quad (7.6)$$

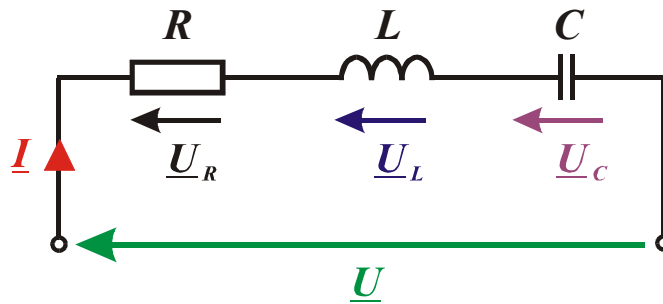
Rezonans występujący w obwodzie, w którym elementy R, L, C połączone są szeregowo, nazywamy **rezonansem napięć** lub *rezonansem szeregowym*.

Rezonans występujący w obwodzie, w którym połączone są równoległe gałęzie R, L oraz R, C lub gałęzie R, L, C nazywamy **rezonansem prądów** lub *rezonansem równoległym*.

7.2. REZONANS NAPIĘĆ

PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozważając obwód składający się z elementów R , L i C połączonych szeregowo (rys.7.2) - zakłada się, że przyłożone napięcie jest sinusoidalnie zmienne o symbolicznej wartości skutecznej \underline{U} i o pulsacji $\omega = 2\pi f$.



Rys. 7.2

Dla rozpatrywanego obwodu słuszne są zależności

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_R &= R \underline{I} \\ \underline{U}_L &= jX_L \underline{I} \\ \underline{U}_C &= -jX_C \underline{I} \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = [R + j(X_L - X_C)] \underline{I} = (R + jX) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I} \quad (7.8)$$

Impedancja obwodu wynosi

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (7.9)$$

Warunkiem rezonansu (7.1) jest to, aby $X=0$, czyli $X_L=X_C$ lub

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (7.10)$$

Pulsację rezonansową ω_r obwodu szeregowego RLC znajduje się z powyższego równania, otrzymując

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7.11)$$

stąd częstotliwość rezonansowa f_r wynosi $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.12)$

Jeżeli częstotliwość źródła napięcia zasilającego jest równa częstotliwości rezonansowej obwodu ($f = f_r$) to obwód jest w stanie rezonansu szeregowego i wówczas:

- **impedancja obwodu jest równa rezystancji** (impedancja osiąga wartość minimalną)

$$\underline{Z} = R \quad ; \quad (7.13)$$

- **napięcie na rezystancji obwodu jest równe napięciu przyłożonemu do obwodu**

$$\underline{U}_R = \underline{U} \quad ; \quad (7.14)$$

- **suma geometryczna napięć na indukcyjności i pojemności obwodu jest równa zero**

$$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0 \quad ; \quad (7.15)$$

- **napięcie na indukcyjności jest co do modułu równe napięciu na pojemności**

$$U_L = U_C \quad ; \quad (7.16)$$

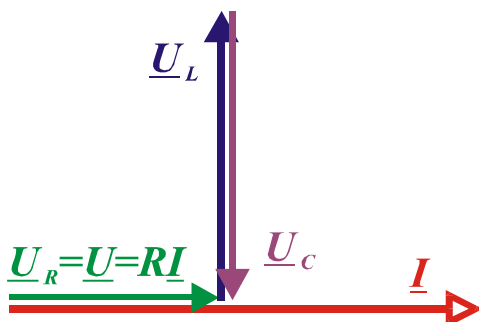
- **wobec $X=0$, prąd w obwodzie osiąga wartość maksymalną**

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} \quad ; \quad (7.17)$$

- **kąt przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a prądem jest równy zero**

$$\varphi = 0 \quad . \quad (7.18)$$

Wykres wskazowy prądu i napięć dla obwodu szeregowego RLC w stanie rezonansu - rys.7.3.



Rys. 7.3.

Ze względu na równość modułów napięć na elementach reaktancyjnych i fakt, że mogą być one **wielokrotnie większe** od modułu napięcia przyłożonego - rezonans w rozpatrywanym obwodzie nazywamy **rezonansem napięć**.

Parametrem, który wskazuje ile razy napięcie na indukcyjności lub pojemności jest większe od napięcia na zaciskach obwodu w stanie rezonansu jest dobroć Q .

W rozpatrywanym obwodzie szeregowym, w stanie rezonansu dobroć definiuje się jako stosunek modułu napięcia na elemencie reaktancyjnym (kondensatorze lub cewce) do modułu napięcia na rezystancji, czyli

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC}. \quad (7.19)$$

Uwzględniając wzór na pulsację rezonansową (7.11), dobroć przedstawia się jako

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R}, \quad (7.20)$$

gdzie ρ jest reaktancją charakterystyczną obwodu (reaktancją indukcyjną lub pojemnościową obwodu przy częstotliwości rezonansowej)

$$\rho = \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.21)$$

Moduły napięć na elementach reaktancyjnych obwodu w stanie rezonansu można opisać następującą zależnością

$$U_L = \omega_r L \frac{U}{R} = U_C = \frac{1}{\omega_r C} \frac{U}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} U = \frac{\rho}{R} U = Q U, \quad (7.22)$$

Z powyższego równania wynika, iż dobroć jest miarą przepięcia występującego w obwodzie w stanie rezonansu (napięcie na indukcyjności lub pojemności jest Q razy większe od napięcia na zaciskach obwodu).

STROJENIE SZEREGOWEGO OBWODU RLC DO REZONANSU

Na podstawie równania (7.10) można stwierdzić, że rezonans w szeregowym obwodzie RLC uzyskuje się przez:

- regulację pulsacji ω (częstotliwości) źródła napięcia zasilającego (generatora)
- regulację indukcyjności L bądź pojemności C .

W pierwszym przypadku mówi się o **strojeniu generatorem**. Dotyczy on sytuacji, w której zmienia się wartość częstotliwości f napięcia zasilającego, tak aby zrównała się ona z daną częstotliwością rezonansową obwodu f_r - określoną przez wartości parametrów obwodu (L oraz C) zgodnie z zależnością (7.12).

W przypadku drugim, nazywanym **strojeniem obwodu**, zmienia się wartość częstotliwości rezonansowej obwodu f_r , tak aby zrównała się z daną częstotliwością f napięcia zasilającego. Zmianę częstotliwości rezonansowej obwodu dokonuje się poprzez zmianę wartości indukcyjności L , a stan rezonansu uzyskuje wówczas dla

$$L = \frac{1}{4\pi^2 C f^2} \quad (7.23)$$

lub pojemności C - stan rezonansu uzyska się gdy

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} \quad (7.24)$$

CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE I KRZYWE REZONANSOWE SZEREGOWEGO OBWODU *RLC*

Charakterystyki częstotliwościowe określają zależność parametrów wtórnych obwodów (impedancji, reaktancji itd.) od częstotliwości (lub pulsacji).

Wykresy zależności wartości skutecznych napięć i prądów obwodów rezonansowych od częstotliwości (lub pulsacji) noszą nazwę krzywych rezonansowych.

Dla szeregowego obwodu rezonansowego *RLC* można określić następujące charakterystyki częstotliwościowe:

- charakterystykę reaktancji indukcyjnej obwodu

$$X_L(\omega) = \omega L ; \quad (7.25)$$

- charakterystykę reaktancji pojemnościowej obwodu

$$X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} ; \quad (7.26)$$

- charakterystykę reaktancji wypadkowej obwodu

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} ; \quad (7.27)$$

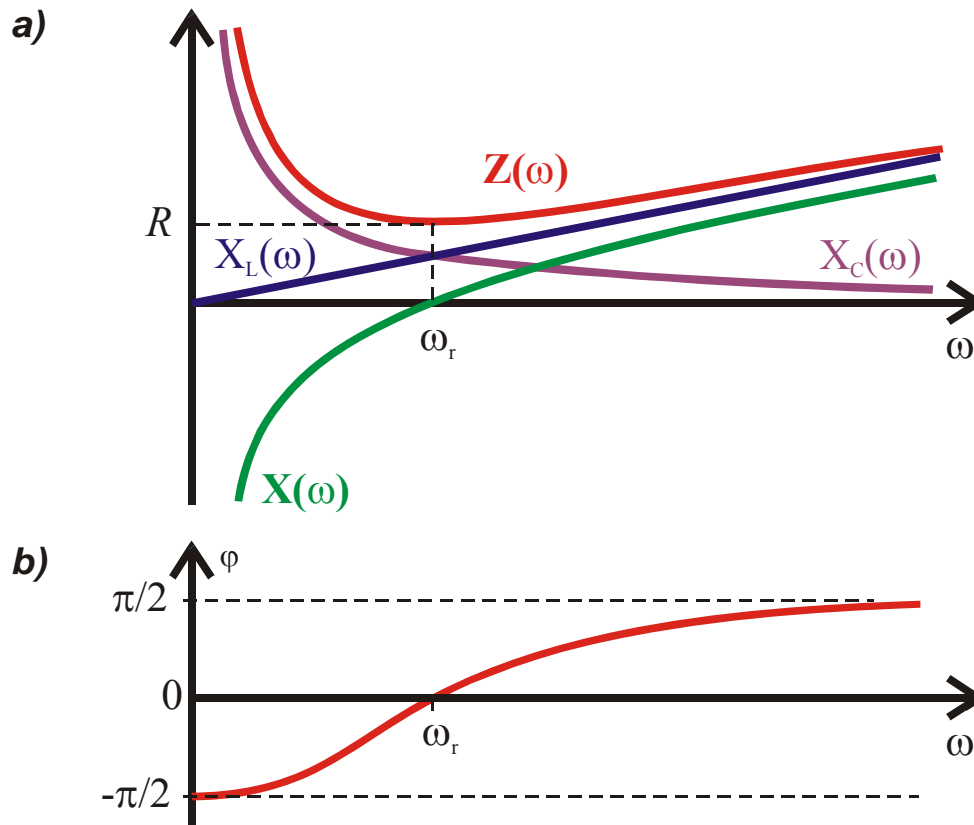
- charakterystykę impedancji (modułu impedancji) obwodu

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} ; \quad (7.28)$$

- charakterystykę kąta przesunięcia fazowego (argumentu impedancji) obwodu

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} . \quad (7.29)$$

Na rysunku 7.4 przedstawiono przykładowe przebiegi wymienionych wyżej charakterystyk. Wynika z niego, że



Rys. 7.4.

Dla pulsacji mniejszych od pulsacji rezonansowej, reaktancja wypadkowa i kąt przesunięcia fazowego obwodu są mniejsze od zera

– obwód ma charakter pojemnościowy.

W miarę zbliżania się do pulsacji rezonansowej, moduł impedancji obwodu maleje do wartości minimalnej (do wartości rezystancji R obwodu), natomiast argument impedancji (kąt przesunięcia fazowego) obwodu zbliża się do zera.

Dla pulsacji większych od pulsacji rezonansowej, reaktancja wypadkowa i kąt przesunięcia fazowego obwodu są większe od zera

– obwód ma charakter indukcyjny.

W przypadku obwodu szeregowego RLC rozważa się na ogół następujące krzywe rezonansowe:

- krzywą rezonansową prądu

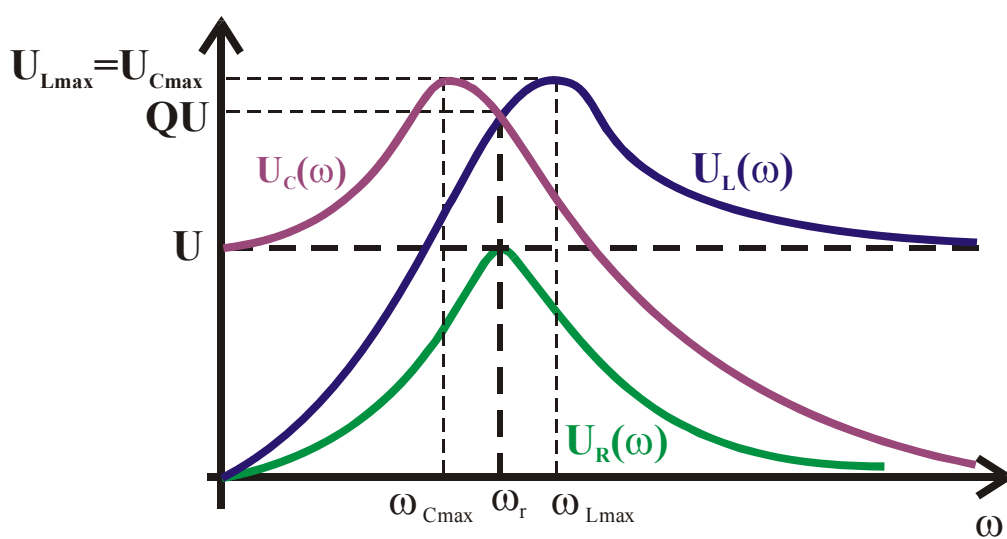
$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} ; \quad (7.30)$$

- krzywe rezonansowe napięć na elementach obwodu, jako:

$$U_R(\omega) = R I(\omega) = \frac{R U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} , \quad (7.31)$$

$$U_L(\omega) = \omega L I(\omega) = \frac{\omega L U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} , \quad (7.32)$$

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega) = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} . \quad (7.33)$$



Rys. 7.5.

Wartość skuteczna napięcia na indukcyjności osiąga maksimum po rezonansie, zaś napięcie na pojemności osiąga maksimum przed rezonansem (rys.7.5).

Napięcie na indukcyjności osiąga wartość maksymalną przy pulsacji ω_{Lmax} równej

$$\omega_{Lmax} = \omega_r \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} > \omega_r, \quad (7.34)$$

natomiast napięcie na pojemności dla pulsacji ω_{Cmax} wynoszącej

$$\omega_{Cmax} = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_r. \quad (7.35)$$

Obie wartości maksymalne napięć są sobie równe

$$U_{Lmax} = U_{Cmax} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} U > QU \quad (7.36)$$

i są większe od wartości QU w stanie rezonansu.

PASMO PRZEPUSTOWE SZEREGOWEGO OBWODU REZONANSOWEGO

W przypadku obwodów rezonansowych za pasmo przepustowe (pasmo przenoszenia) przyjmuje się z reguły tzw. trzydecybelowe (3-dB) pasmo przepustowe.

Pasmem przepustowym 3-dB szeregowego obwodu rezonansowego nazywa się przedział pulsacji, dla których wartość skuteczna I prądu w obwodzie (przy założonej stałej wartości skutecznej napięcia przyłożonego do obwodu) maleje nie więcej niż $\sqrt{2}$ -krotnie w stosunku do wartości skutecznej I_r prądu w rezonansie, tzn. dla których spełniona jest nierówność

$$\frac{I(\omega)}{I_r} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7.37)$$

Dla pulsacji granicznych (dolnej ω_d i górnej ω_g) spełniona jest równość

$$\frac{I_r}{I(\omega_d)} = \frac{I_r}{I(\omega_g)} = \sqrt{2}. \quad (7.38)$$

Bardzo ważnym parametrem obwodu rezonansowego charakteryzującym jego właściwości selektywne jest szerokość pasma przepustowego, zdefiniowana jako

$$S_{(3dB)} = \omega_g - \omega_d. \quad (7.39)$$

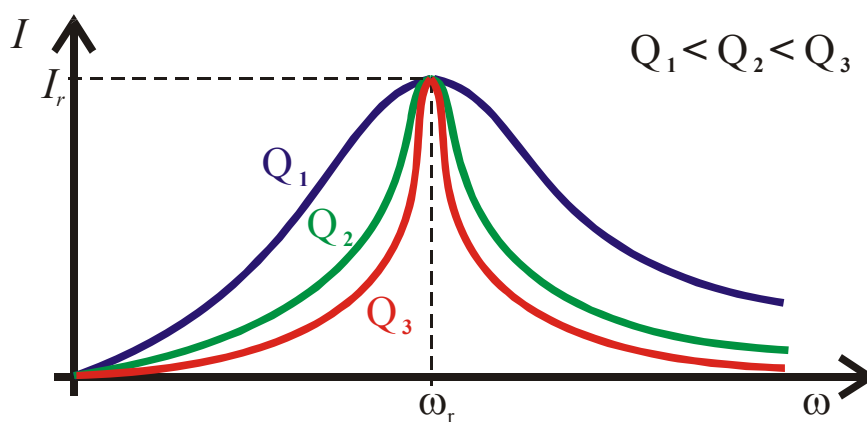
Parametr ten zależy od pulsacji rezonansowej i dobroci obwodu w następujący sposób

$$S_{(3dB)} = \frac{\omega_r}{Q}, \quad (7.40)$$

podobnie zależność pasma przepustowego wyrażonego w hercach

$$S_{p(3dB)} = \frac{f_r}{Q}. \quad (7.41)$$

Wpływ dobroci na kształt krzywej rezonansowej prądu ilustrują wykresy przedstawione na rysunku 7.6. Wykreślono je przyjmując, że dobroć obwodu jest zmieniana tylko przez dobór indukcyjności L i pojemności C przy zachowaniu stałej pulsacji rezonansowej ω_r .



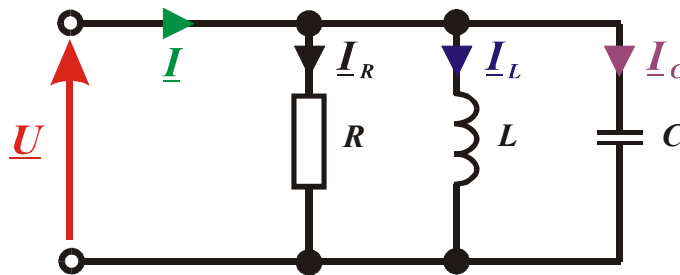
Rys. 7.6.

Dobroć Q jest podstawowym parametrem obwodu rezonansowego decydującym o jego jakości jako obwodu selektywnego.

7.3. REZONANS PRĄDÓW

PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozważając obwód składający się z elementów R , L i C połączonych równoległe (rys.7.7) - zakłada się, że przyłożone napięcie jest sinusoidalnie zmienne o symbolicznej wartości skutecznej \underline{U} i o pulsacji $\omega = 2\pi f$.



Rys. 7.7

Dla rozpatrywanego obwodu słuszne są zależności

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_R &= G\underline{U} \\ \underline{I}_L &= -jB_L\underline{U} \\ \underline{I}_C &= jB_C\underline{U} \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = [G + j(B_C - B_L)]\underline{U} = (G + jB)\underline{U} = \underline{Y}\underline{U} \quad (7.43)$$

Admitancja obwodu wynosi

$$\underline{Y} = G + jB = G + j(B_C - B_L) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad (7.44)$$

Warunkiem rezonansu (9.1) jest to, aby $B=0$, czyli $B_C=B_L$ lub

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}. \quad (7.45)$$

Pulsację rezonansową ω_r obwodu równoległego RLC znajduje się z powyższego równania, otrzymując

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7.46/7.11)$$

stąd częstotliwość rezonansowa f_r wynosi $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.47/7.12)$

Jeżeli częstotliwość źródła napięcia zasilającego jest równa częstotliwości rezonansowej obwodu ($f = f_r$) to obwód jest w stanie rezonansu równoległego i wówczas:

- **admitancja obwodu jest równa konduktancji** (admitancja osiąga wartość minimalną)

$$\underline{Y} = G \quad ; \quad (7.48)$$

- **prąd w gałęzi rezystancyjnej jest równy prądowi obwodu**

$$\underline{I}_R = \underline{I} \quad ; \quad (7.49)$$

- **suma geometryczna prądów w gałęzi indukcyjności i pojemnościowej obwodu jest równa zeru**

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0 \quad ; \quad (7.50)$$

- **prąd w gałęzi indukcyjnej jest co do modułu równy prądowi w gałęzi pojemnościowej**

$$I_L = I_C \quad ; \quad (7.51)$$

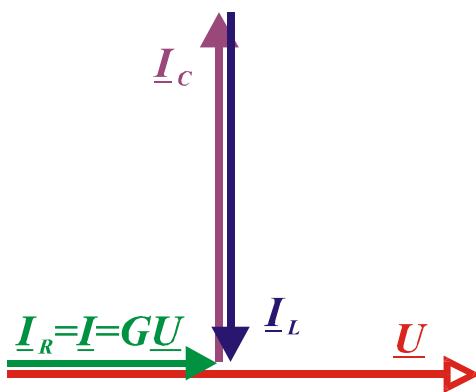
- **wobec $B=0$, prąd w obwodzie osiąga wartość minimalną**

$$\underline{I} = \underline{U} G \quad ; \quad (7.52)$$

- **kąt przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a prądem jest równy zeru**

$$\varphi = 0 \quad . \quad (7.53)$$

Wykres wskazowy napięcia i prądów dla obwodu równoległego RLC w stanie rezonansu - rys.7.8.



Rys. 7.8.

Ze względu na równość modułów prądów w gałęziach reaktancyjnych i fakt, że mogą być one wielokrotnie większe od modułu prądu dopływającego do obwodu - rezonans w rozpatrywanym obwodzie nazywamy **rezonansem prądów**

Parametrem, który wskazuje ile prąd w gałęzi z indukcyjnością lub pojemnością jest większy od prądu dopływającego do obwodu w stanie rezonansu jest dobroć Q .

W rozpatrywanym obwodzie równoległym, w stanie rezonansu dobroć definiuje się jako stosunek modułów prądu w elemencie reaktancyjnym (kondensatorze lub cewce) do prądu w gałęzi z rezystorem, czyli

$$Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{1}{\omega_r L G} = \frac{\omega_r C}{G}. \quad (7.54)$$

Uwzględniając wzór na pulsację rezonansową (7.46), dobroć przedstawia się jako

$$Q = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{\rho}, \quad (7.55)$$

gdzie ρ jest reaktancją charakterystyczną obwodu równoległego (reaktancją indukcyjną lub pojemnościową obwodu przy częstotliwości rezonansowej), zdefiniowaną identycznie jak dla obwodu szeregowego (7.21).

Moduły prądów w elementach reaktancyjnych w stanie rezonansu opisać następującą zależnością

$$I_L = \frac{I R}{\omega_r L} = I_C = \omega_r C I R = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} I = \frac{R}{\rho} I = Q I, \quad (7.56)$$

Z powyższego równania wynika, iż dobroć jest miarą przeteżenia występującego w obwodzie w stanie rezonansu (prąd w gałęzi indukcyjnej lub pojemnościowej jest Q razy większy od prądu dopływającego do obwodu).

STROJENIE OBWODU RÓWNOLEGŁEGO DO REZONANSU

Na podstawie równania (7.46) - identycznie jak to miało miejsce w przypadku obwodu szeregowego - można stwierdzić, że w celu uzyskania rezonansu w obwodzie równoległym RLC należy dokonać strojenia generatora (zmiana f) bądź strojenia obwodu (zmiana L lub C).

Przy strojeniu (zarówno obwodu szeregowego jak i równoległego) znamienne jest to, iż częstotliwość rezonansowa jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z indukcyjności lub pojemności:

$$f_r = \frac{k_1}{\sqrt{L}} \quad (7.57)$$

lub

$$f_r = \frac{k_2}{\sqrt{C}} \quad (7.58)$$

gdzie k_1 i k_2 są wielkościami stałymi.

CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE I KRZYWE REZONANSOWE RÓWNOLEGŁEGO OBWODU RLC

Charakterystyki częstotliwościowe:

- charakterystykę susceptancji indukcyjnej obwodu

$$B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}; \quad (7.59)$$

- charakterystykę susceptancji pojemnościowej obwodu

$$B_C(\omega) = \omega C; \quad (7.60)$$

- charakterystykę susceptancji wypadkowej obwodu

$$B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}; \quad (7.61)$$

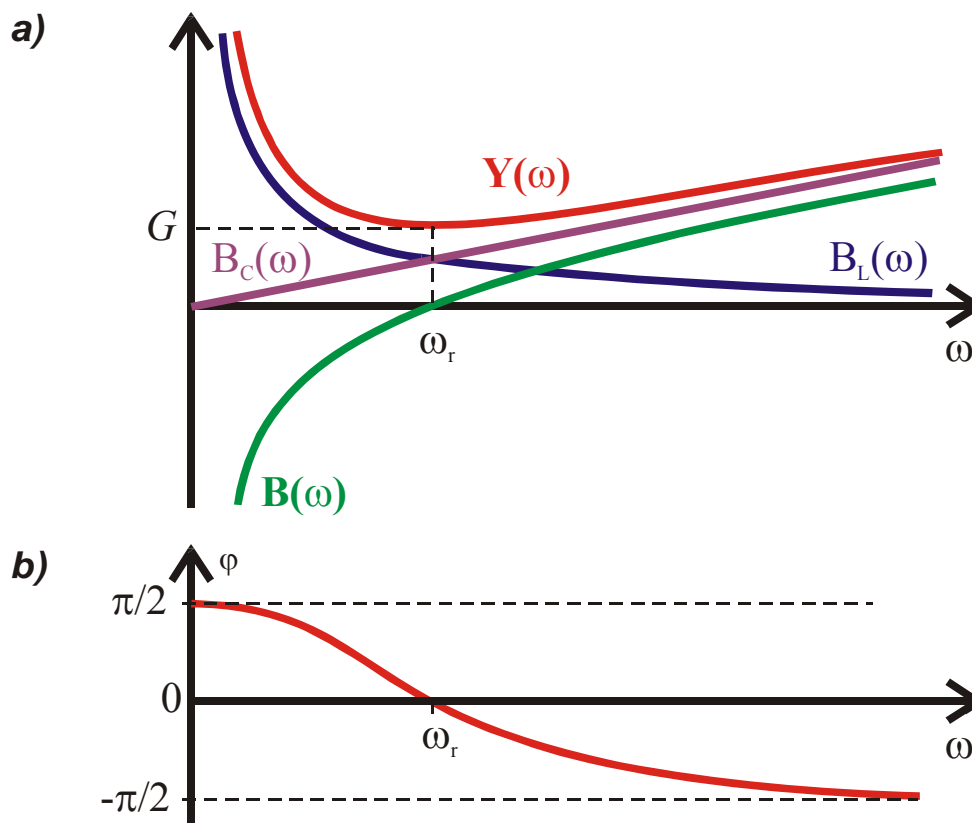
- charakterystykę admitancji (modułu admitancji) obwodu

$$Y(\omega) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad (7.62)$$

- charakterystykę kąta przesunięcia fazowego (argumentu admitancji wziętego ze znakiem przeciwnym) obwodu

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}. \quad (9.63)$$

Na rysunku 7.10 przedstawiono przykładowe przebiegi wymienionych wyżej charakterystyk. Wynika z niego, że



Rys. 7.10.

Dla pulsacji mniejszych od pulsacji rezonansowej: susceptancja wypadkowa jest mniejsza od zera a kąt przesunięcia fazowego obwodu jest większy od zera – obwód ma charakter indukcyjny.

w miarę zbliżania się do pulsacji rezonansowej, moduł admitancji obwodu maleje do wartości minimalnej (do wartości konduktancji G obwodu), natomiast kąt przesunięcia fazowego obwodu zbliża się do zera.

Dla pulsacji większych od pulsacji rezonansowej, reaktancja wypadkowa jest większa od zera a kąt przesunięcia fazowego obwodu jest mniejszy od zera – obwód ma charakter pojemnościowy.

W przypadku obwodu równoległego RLC , krzywe rezonansowe przedstawiają wartości skuteczne prądów występujących w obwodzie w funkcji pulsacji (lub częstotliwości). Jest to zatem

- zależność prądu obwodu od pulsacji

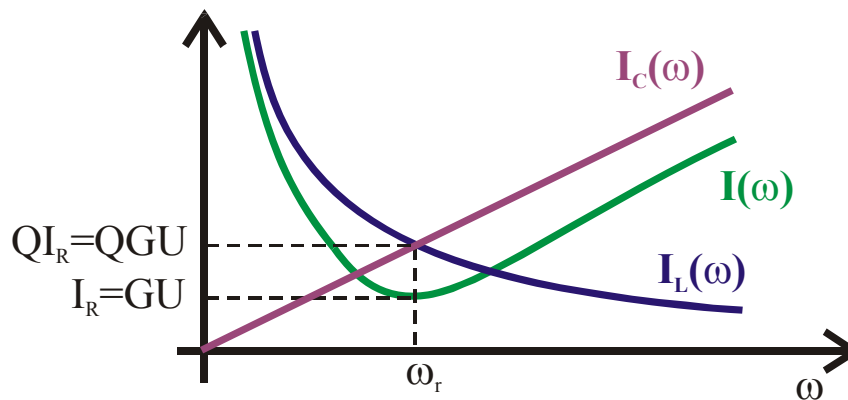
$$I(\omega) = U Y(\omega) = U \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}; \quad (7.64)$$

- zależność prądu w gałęzi indukcyjnej od pulsacji

$$I_L(\omega) = \frac{U}{\omega L}, \quad (7.65)$$

- zależność prądu w gałęzi pojemnościowej od pulsacji

$$I_C(\omega) = \omega C U. \quad (7.66)$$



Rys. 7.11.

Przy rezonansie prąd I dopływający do obwodu osiąga wartość minimalną (rys.7.11), równą wartości prądu występującego w gałęzi rezystancyjnej ($I = I_R = GU$). Oznacza to, że w przypadku bardzo małej konduktancji jest prawie równy zero. Natomiast prądy w gałęziach reaktancyjnych są sobie równe i Q -krotnie większe od prądu dopływającego do obwodu.