8. MOC W OBWODZIE PRĄDU SINUSOIDALNEGO

8.1. MOC CHWILOWA

Jeśli na zaciskach dwójnika SLS występuje napięciowe wymuszenie harmoniczne, to prąd zmienia się również sinusoidalnie z tą samą pulsacją

Niech $u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$ oraz $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$

Moc chwilowa pobierana przez analizowany dwójnik, wyniesie (zal.1.4)

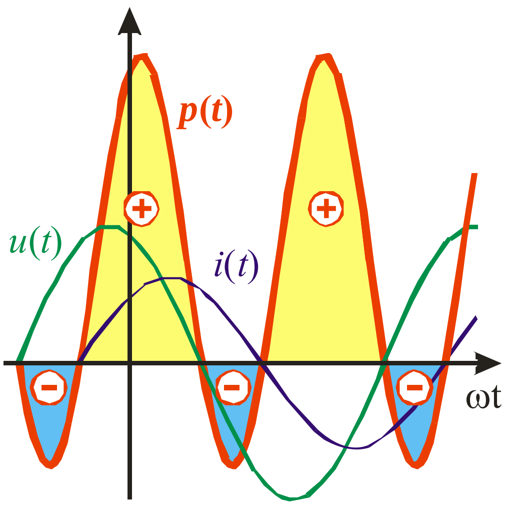
$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \tag{8.1}$$

Ponieważ $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$, otrzymamy

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\Psi_u - \Psi_i) - \frac{U_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \Psi_u + \Psi_i) \tag{8.2}$$

uwzględniając $\frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}} = U\,I$ oraz $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$

ostatecznie
$$\boxed{p(t) = U I \cos\varphi - U I \cos(2\omega t + \Psi_u + \Psi_i)} \tag{8.3}$$



$p(t) > 0$ w przedziałach czasu, w których napięcie oraz prąd mają jednakowe znaki.

Dwójnik pobiera moc (energię) ze źródła.

$p(t) < 0$ w przedziałach czasu, w których napięcie oraz prąd mają różne znaki.

Dwójnik oddaje moc do źródła, przekazuje energię nagromadzoną w polu magnetycznym cewek i polu elektrycznym kondensatorów.

UWAGA: Zmiana znaku mocy chwilowej występuje tylko w obwodach zawierających elementy L,C . Jeśli obwód posiada tylko rezystory, energia nie może się w nich gromadzić i moc jest zawsze dodatnia.

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

8.2. MOC CZYNNA, POZORNA I BIERNA

Jak wynika z wzoru (8.3) moc chwilowa ma dwie składowe

$$\boxed{p(t) = \underbrace{U\,I\cos\varphi}_{1} - \underbrace{U\,I\cos(2\omega t + \Psi_u + \Psi_i)}_{2}}$$

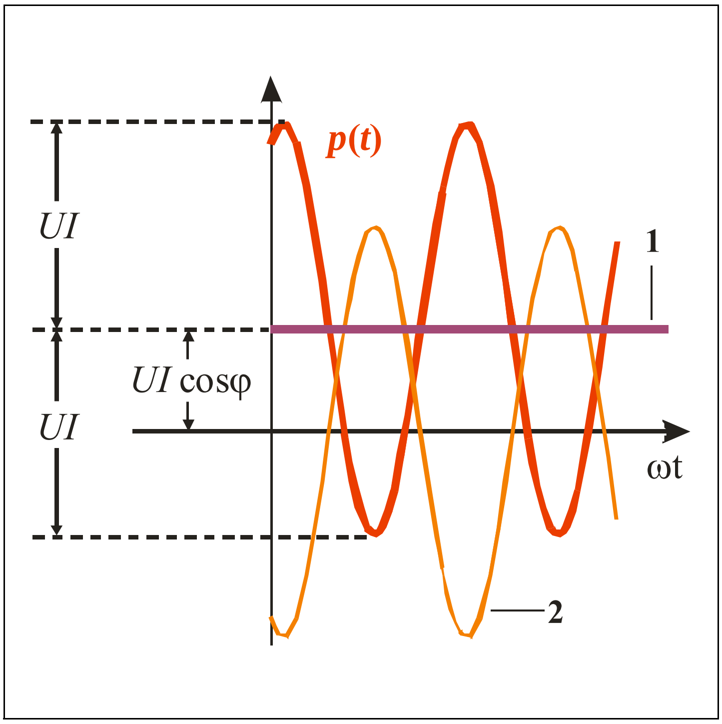
składowa stała **składowa zmienna**
o częstotliwości dwukrotnie większej od częstotliwości napięcia i prądu

Moc chwilowa oscyluje zatem sinusoidalnie z częstotliwością *2f* wokół wartości stałej $U\,I\cos\varphi$, a jej amplituda wynosi *UI*.

W zależności od wartości kata φ , tzn. charakteru dwójnika, wartość składowej stałej zmienia się i w krańcowych przypadkach wynosi dla:

$$\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad U\,I\cos\varphi = UI$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad U\,I\cos\varphi = 0$$



Energia w ciągu jednego okresu wynosi $W_T = \int_0^T p(t)\,dt$

Jeżeli energię tę podzielimy przez czas równy okresowi *T*, to otrzymamy **wartość średnią mocy chwilowej za okres *T***, którą nazywamy

MOCĄ CZYNNĄ i oznaczamy przez *P*

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U\,I\cos\varphi\,dt - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T U\,I\cos(2\omega t + \Psi_u + \Psi_i)\,dt}_{=0} \qquad (8.4)$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

zatem

MOC CZYNNA

$$\boxed{P = U\,I\cos\varphi} \quad [\mathrm{W}] \tag{8.5}$$

Moc czynna jest równa iloczynowi wartości skutecznych napięcia i prądu oraz cosinusa kąta przesunięcia fazowego między napięciem i prądem, zwanego **współczynnikiem mocy**.

Moc czynna P jest liczbą rzeczywistą niezależną od czasu t.

<table>
<tr><td colspan="2">Jeśli dla dwójnika SLS</td></tr>
<tr><td>$P > 0$</td><td>$P < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">oznacza to, że moc czynna jest faktycznie</td></tr>
<tr><td>pobierana
przez dwójnik z otoczenia</td><td>oddawana
przez dwójnik do otoczenia</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Dla dwójnika SLSB gdy jest</td></tr>
<tr><td>rezystancyjny</td><td>idealną cewką lub
idealnym kondensatorem</td></tr>
<tr><td colspan="2">moc czynna osiąga wartość</td></tr>
<tr><td>maksymalną $P = UI$</td><td>minimalną $P = 0$</td></tr>
</table>

Moc czynna odpowiada więc energii, która wydziela się w jednostce czasu w postaci ciepła w elementach rezystancyjnych – można ją zatem wyrazić w trzech równoważnych postaciach

$$\boxed{P = U\,I\cos\varphi = R\,I^2 = G\,U^2} \tag{8.6}$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

Urządzenia elektryczne mają określone znamionowe wartości napięcia i prądu, dlatego charakteryzuje się je nie mocą czynną, lecz wielkością będącą iloczynem wartości skutecznych napięcia i prądu, zwaną

MOCĄ POZORNĄ i oznaczoną przez S

$$\boxed{S = UI} \quad [\mathrm{VA}] \tag{8.7}$$

Oznacza to, że moc pozorna jest równa największej wartości mocy czynnej, którą można otrzymać przy danym napięciu U oraz prądzie I.

Porównując zależność (8.7) z (8.3) można stwierdzić, że moc pozorna jest liczbowo równa amplitudzie składowej zmiennej mocy chwilowej.

Współczynnik mocy jest więc stosunkiem mocy czynnej do pozornej

$$\frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi \tag{8.8}$$

Ponieważ dla dwójnika szeregowego RLC (zal. 6.68) $U = ZI$

zaś dla dwójnika równoległego RLC (zal. 6.71) $I = YU$

to po uwzględnieniu ich w (8.7) moc pozorną można wyrazić w trzech równoważnych postaciach:

$$\boxed{S = UI = ZI^2 = YU^2} \tag{8.9}$$

W obwodach elektrycznych prądu harmonicznego znajduje zastosowanie jeszcze trzecia wielkość będąca iloczynem wartości skutecznych napięcia i prądu oraz sinusa kąta przesunięcia fazowego między napięciem i prądem, zwana

MOCĄ BIERNĄ i oznaczana symbolem Q

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi} \quad [\text{var}] \tag{8.10}$$

Z trójkąta napięć dwójnika szeregowego RLC wynika, że

$$U\sin\varphi = XI$$

zaś z trójkąta prądów dla dwójnika równoległego

$$I\sin\varphi = -BU$$

to po uwzględnieniu ich w (8.10) moc bierną można wyrazić w trzech równoważnych postaciach:

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi = X\,I^2 = -BU^2} \tag{8.11}$$

Czyli moc bierna związana jest z istnieniem w obwodzie elementów reaktancyjnych. Ponieważ kąt φ jest dodatni dla obwodów o charakterze indukcyjnym, ujemny w przypadku obwodów o charakterze pojemnościowym, zatem jeśli

- $\varphi > 0$; $\sin\varphi > 0$; to $Q > 0$ (moc bierna indukcyjna jest dodatnia);
- $\varphi < 0$; $\sin\varphi < 0$; to $Q < 0$ (moc bierna pojemnościowa jest ujemna)

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

8.3. ZESPOLONA MOC POZORNA

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*} \tag{8.12}$$

Podstawiając $\underline{U} = U\,e^{j\Psi_u}$ oraz $\underline{I}^* = I\,e^{-j\Psi_i}$ otrzymujemy

$$\boxed{\underline{S} = U\,I\,e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} = U\,I\,e^{j\varphi} = U\,I\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)} \tag{8.13}$$

Część rzeczywista zespolonej mocy pozornej jest równa mocy czynnej P, a część urojona mocy biernej Q układu, czyli:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} P &= U\,I\cos\varphi = \mathrm{Re}\left[\underline{S}\right] \\ Q &= U\,I\sin\varphi = \mathrm{Im}\left[\underline{S}\right] \end{aligned}\right\}} \tag{8.14}$$

Wobec tego zespoloną moc pozorną można przedstawić w postaci:

$$\boxed{\underline{S} = P + j\,Q} \tag{8.15}$$

Moduł zespolonej mocy pozornej

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U\,I \tag{8.16}$$

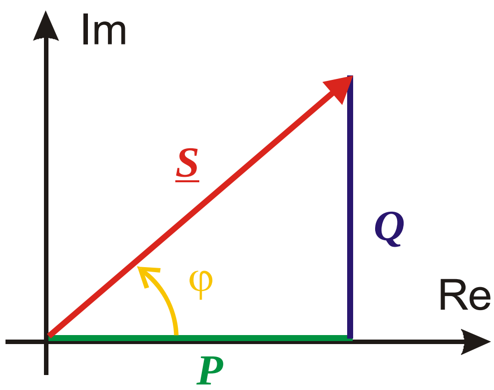
jest równy mocy pozornej układu

a argument zespolonej mocy pozornej

$$\arg\underline{S} = \varphi \tag{8.17}$$

kątowi przesunięcia fazowego między napięciem i prądem

Zespoloną moc pozorną $\underline{S}$ można przedstawić geometrycznie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej za pomocą **<u>trójkąta mocy</u>**.



Wyrazimy **zespoloną moc pozorną w zależności od impedancji $\underline{Z}$** dwójnika.

Na podstawie prawa Ohma mamy:

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

czyli
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^*$$

wobec czego
$$\underline{S} = \underline{Z}\,I^2 = (R + jX)\,I^2 \tag{8.18}$$

Moc czynna i bierna wynoszą zatem

$$P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = R\,I^2\,, \quad Q = \mathrm{Im}[\underline{S}] = X\,I^2$$

a moc pozorna jest równa

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = Z I^2$$

Natomiast **zespolona moc pozorna w zależności od admitancji $\underline{Y}$** dwójnika.

Na podstawie prawa Ohma mamy:

$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$$

Wartość sprzężoną $\underline{I}^*$ otrzymamy zastępując wszystkie wielkości występujące w tym wzorze przez wielkości sprzężone.

Zatem
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}\,\underline{Y}^*\underline{U}^*$$

wobec czego
$$\underline{S} = \underline{Y}^* U^2 = (G - jB)\,U^2 \tag{8.19}$$

Moc czynna i bierna wynoszą zatem

$$P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = G\,U^2\,, \quad Q = \mathrm{Im}[\underline{S}] = -B\,U^2$$

a moc pozorna jest równa

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = Y U^2$$

PRZYKŁAD 8.1

Na zaciskach dwójnika panuje napięcie $\underline{U} = (50 + j100)V$, prąd płynący przez dwójnik wynosi $\underline{I} = (10 - j10)A$. Obliczyć moce dwójnika.

Zespolona moc pozorna $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = (50 + j100)(10 + j10) = (-500 + j1500)\,[VA]$

Moc czynna $P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = -500\,[W]$

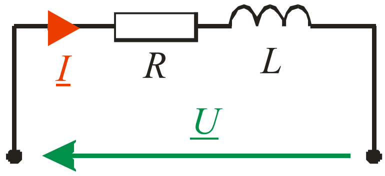
Moc bierna $Q = \mathrm{Im}[\underline{S}] = 1500\,[\mathrm{var}]$

Moc pozorna $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1581\,[VA]$

PRZYKŁAD 8.2

Obliczyć moce dla dwójnika przedstawionego na rysunku – dane:

$\underline{U} = (100 + j50)V$
$R = 50\ \Omega$,
$L = 1$ mH,
$f = 100$ kHz.



Reaktancja dwójnika $X_L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 628\,[\Omega]$

Impedancja dwójnika $\underline{Z} = R + jX_L = (50 + j628)\,[\Omega]$

Prąd dwójnika $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}} = (0{,}092 - j0{,}152)\,[A]$

Zespolona moc pozorna $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = (100 + j50)(0{,}092 + j0{,}152) = (1{,}6 + j19{,}8)\,[VA]$

Moc czynna $P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = 1{,}6\,[W]$

Moc bierna $Q = \mathrm{Im}[\underline{S}] = 19{,}8\,[\mathrm{var}]$

Moc pozorna $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 19{,}9\,[VA]$

8.4. DOPASOWANIE OBCIĄŻENIA DO ŹRÓDŁA

Dopasowanie obciążenia do źródła przebiegu harmonicznego może dotyczyć mocy czynnej lub mocy pozornej.

Warunkiem dopasowania pod względem:

- **Mocy czynnej jest równość**

$$\boxed{\underline{Z}_{dP} = \underline{Z}_{w}^{*}} \tag{8.20}$$

gdzie: $\underline{Z}_{dP}$ - impedancja obciążenia w warunkach dopasowania,
$\underline{Z}_w*$ - sprzężona wartość impedancja wewnętrznej źródła.

Wówczas
$$P_{\max} = \frac{U_o^2}{4\,Z_w \cos\varphi_w} \tag{8.21}$$

- **Mocy pozornej są równości**

$$\boxed{Z_{dS} = Z_w} \tag{8.22a}$$

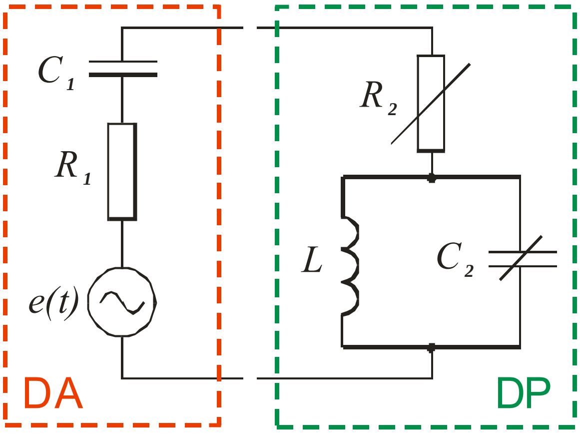
$$\boxed{\varphi_{dS} = \begin{cases} -\pi/2 & dla \quad \varphi_w \in \left(0, +\pi/2\right) \\ \pi/2 & dla \quad \varphi_w \in \left(0, -\pi/2\right) \\ \pm\pi/2 & dla \quad \varphi_w = 0 \end{cases}} \tag{8.22b}$$

PRZYKŁAD 8.3

Dobrać wartości elementów regulowanych R_2 , C_2 tak - aby uzyskać dopasowanie odbiornika ze względu na moc czynną. Obliczyć tę moc – dane:

$e(t) = 14{,}14\sin(500000t)V$

$R_1 = 1$ kΩ, $C_1 = 1$ nF, $L = 1$ mH



Impedancja DA (źródła): $$\underline{Z}_W = R_1 - jX_{C1} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$
$$= (1000 - j2000)\,[\Omega]$$
$$= 2236\,e^{-j\,63{,}43^o}\ [\Omega]$$

Z warunku dopasowania wynika, że $$\mathrm{Re}[\underline{Z}_{DP}] = \mathrm{Re}[\underline{Z}_W]$$ $$\mathrm{Im}[\underline{Z}_{DP}] = -\mathrm{Im}[\underline{Z}_W]$$

Czyli:

$$R_2 = \mathrm{Re}[\underline{Z}_W] = 1\,k\Omega$$

oraz $$\frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L}} = -\frac{1}{j\omega C_1}$$ stąd po przekształceniach

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L} - C_1 = 3\cdot 10^{-9}\,[F]$$

Moc czynna: $$P = \frac{E^2}{4Z_w\cos\varphi_w} = \frac{10^2}{4\cdot 2236\cdot\cos(-63{,}43^o)} = 0{,}025\,[W]$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl