

9. METODY SIECIOWE (ALGORYTMICZNE) ANALIZY OBWODÓW LINIOWYCH

9.1. WPROWADZENIE

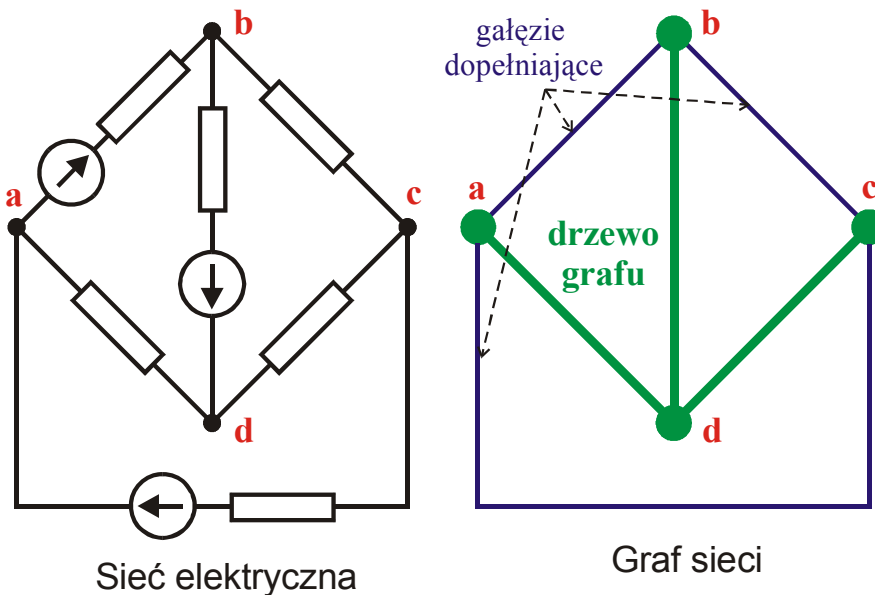
ANALIZA OBWODÓW

Jeżeli przy badaniu obwodu elektrycznego dane są parametry elementów i schemat obwodu, a poszukiwane są napięcia i prądy w różnych częściach obwodu, to takie zagadnienie jest przedmiotem analizy obwodów.

ELEMENTY TEORII GRAFÓW

Grafem sieci (strukturą topologiczną obwodu) nazywamy zbiór punktów reprezentujący węzły obwodu i zbiór linii ciągłych obrazujących gałęzie obwodu.

Drzewem grafu nazywamy podgraf danego grafu złożony z minimalnej liczby dowolnie wybranych gałęzi grafu łączących wszystkie węzły.



Gałęzie grafu tworzące drzewo grafu nazywamy **konarami** (gałęziami drzewa).

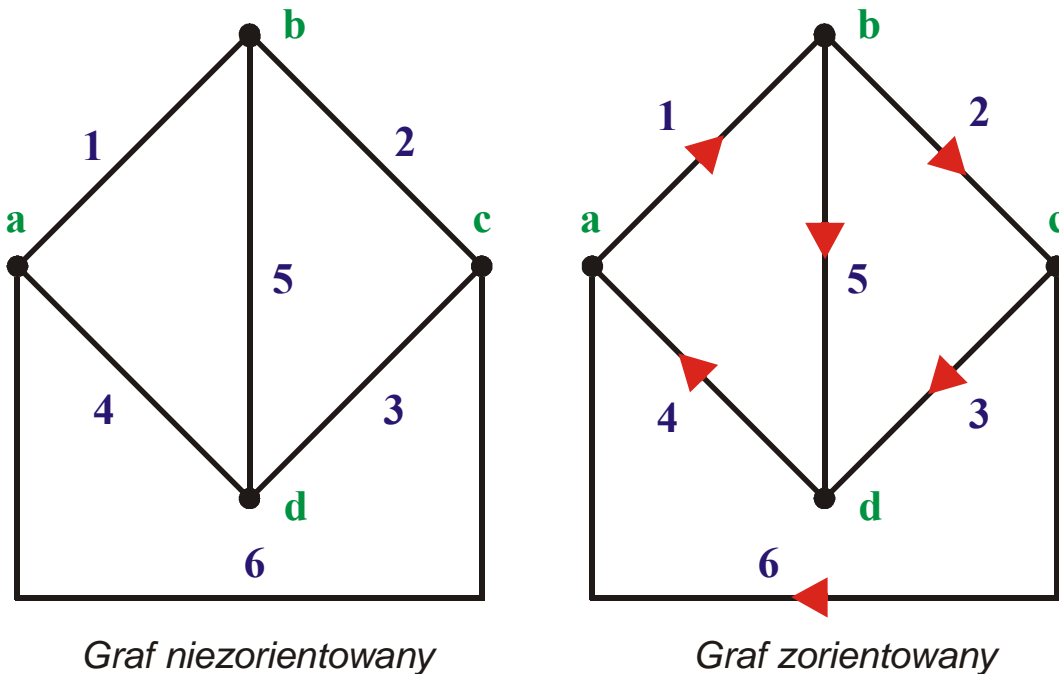
Pozostałe gałęzie grafu nazywamy **gałęziami dopełniającymi** (łączącymi, zamykającymi, cięciwami, strunami).

Każdy graf składający się z w węzłów i g gałęzi zawiera:
 g_d konarów gdzie: $g_d = w - 1$
 g_z gałęzi dopełniających gdzie: $g_z = g - g_d = g - w + 1$

Mówimy, że gałąź jest **incydentna** z węzłem, jeżeli węzeł jest jednym z punktów końcowych gałęzi.

Dla dowolnej sieci można podać graf, w którym zachowana zostaje wyłącznie struktura geometryczna sieci (każdej gałęzi grafu przypisuje się numer lub symbol identyfikujący ją z gałęzią sieci). Tak otrzymany graf jest **grafem nieorientowanym**.

Jeśli każdej gałęzi przypiszemy dodatkowo orientację – orientacja gałęzi jest wybierana dowolnie i odpowiada dodatniej polaryzacji napięcia gałęziowego lub kierunkowi przepływu prądu – to otrzymujemy **graf zorientowany** (*skierowany*).



Z każdą gałęzią związana jest para (u, i) napięcia i prądu, zatem dla g gałęzi

$$\text{liczba zmiennych sieci} = 2g$$

Ponieważ dla każdej pary (u, i) istnieją proste związki pozwalające na określenie jednej wielkości przy znajomości drugiej, to

$$\text{liczba poszukiwanych zmiennych sieci} = g$$

Dysponując układem g równań, wiążących prądy gałęziowe lub wiążących napięcia gałęziowe możemy dokonać analizy sieci.

Pytanie: Czy wszystkie równania są niezależne?

➤ Przyjmując za **niewiadome** w procesie analizy sieci
 g prądów gałęziowych

Wszystkie prądy dzielimy na dwie grupy: prądy w konarach (gałęziach drzewa) i prądy w gałęziach dopełniających. Usuwając z grafu gałęzie dopełniające powodujemy rozwarście wszystkich oczek – w rezultacie uniemożliwiony zostaje przepływ prądu w sieci. Prądy we wszystkich gałęziach stają się równe zero. A zatem sprowadzenie do zera prądów w gałęziach dopełniających powoduje zerowanie wszystkich pozostałych prądów. Stąd wniosek, że prądy gałęzi drzewa są funkcjami (są zależne od) prądów gałęzi dopełniających. Czyli:

1. liczba niezależnych prądów gałęziowych określona jest liczbą gałęzi dopełniających g_z ,
2. liczba gałęzi dopełniających określa **liczbę oczek niezależnych n**

$$g_z = g - w + 1 = n \quad (9.1)$$

➤ Przyjmując za **niewiadome** w procesie analizy sieci
 g napięć gałęziowych

Przez wybór drzewa dokonuje się podziału na napięcia na konarach (gałęziach drzewa) i gałęziach dopełniających. Ponieważ konary łączą parami wszystkie węzły, to gdy napięcia na konarach będą zerami, to potencjały wszystkich węzłów staną się jednakowe i równe zero. A zatem sprowadzenie do zera napięć na gałęziach drzewa, zeruje wszystkie napięcia gałęziowe. Stąd wniosek, że napięcia na gałęziach dopełniających są funkcjami (są zależne od) napięć na gałęziach drzewa. Czyli:

1. liczba niezależnych napięć gałęziowych określona jest liczbą konarów (gałęzi drzewa) g_d ,
2. liczba konarów określa **liczbę węzłów niezależnych m**

$$g_d = w - 1 = m \quad (9.2)$$

METODA PRAW KIRCHHOFFA (KLASYCZNA)

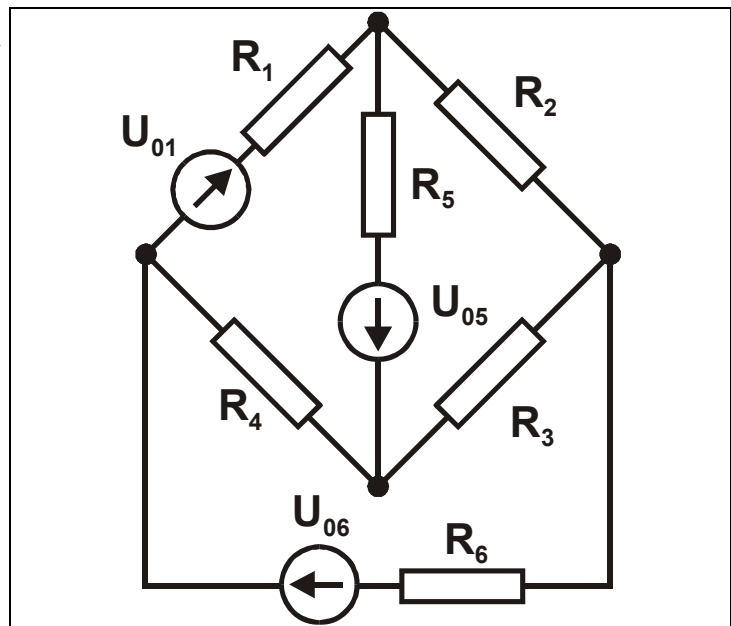
Niech dane będą napięcia źródłowe i rezystancje, poszukujemy natomiast prądów.

Dane :

$$U_{01} = U_{05} = 5V, U_{06} = 6V$$

$$R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = 2\Omega;$$

$$R_3 = R_4 = 4\Omega.$$



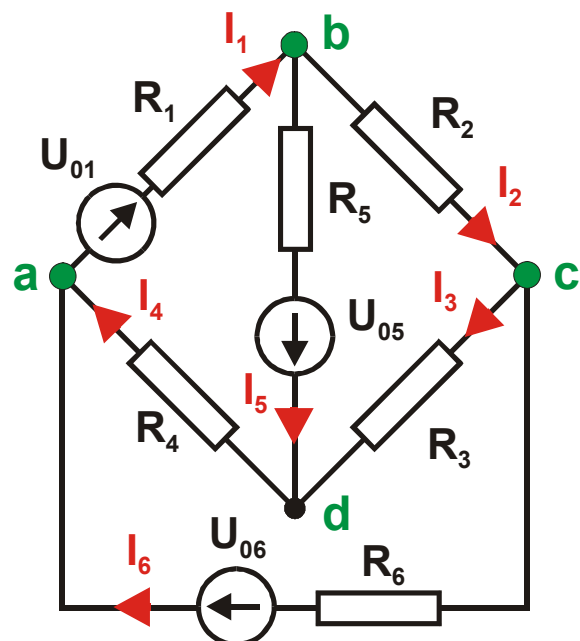
Należy:

1. ustalić liczbę gałęzi i węzłów;

$$\text{liczba gałęzi } g = 6, \text{ liczba węzłów } w = 4$$

2. nanieść prądy w gałęziach (przyjmując ich zwroty zupełnie dowolnie);

3. wyeliminować dowolnie jeden z węzłów obwodu (np. węzeł d) a dla pozostałych ułożyć równania na podstawie PPK:

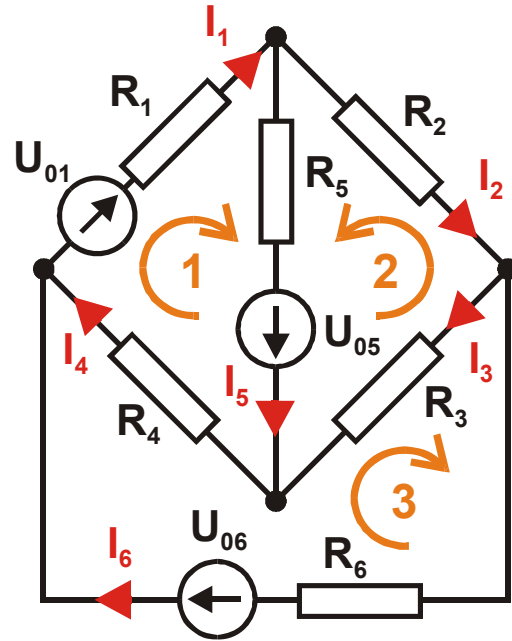


$$\text{- dla węzła } \mathbf{a} : I_6 + I_4 = I_1$$

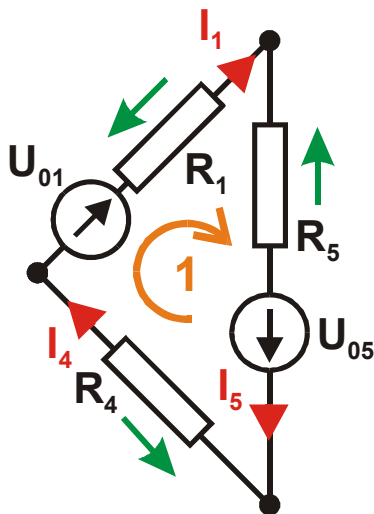
$$\text{- dla węzła } \mathbf{b} : I_1 = I_2 + I_5$$

$$\text{- dla węzła } \mathbf{c} : I_2 = I_3 + I_6$$

4. określić liczbę n oczek niezależnych w obwodzie;
 $n = g - w + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$
5. dokonać wyboru oczek niezależnych i zaznaczyć dodatni zwrot ich obiegu (kierunek sumowania);
6. dla wybranych oczek ułożyć równania na podstawie NPK:

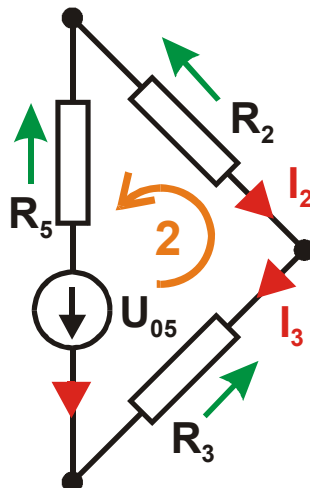


dla 1 oczka:



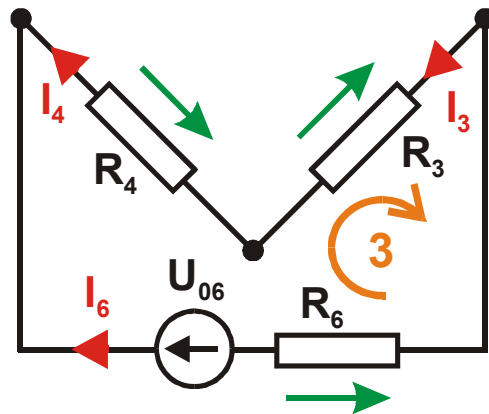
$$U_{01} + U_{05} - R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_4 I_4 = 0$$

dla 2 oczka:



$$U_{05} + R_2 I_2 - R_5 I_5 + R_3 I_3 = 0$$

dla **3** oczka:



$$U_{06} + R_4 I_4 + R_3 I_3 - R_6 I_6 = 0$$

7. rozwiązując układ równań wyznaczyć poszukiwane wielkości

dla węzła a :	$I_6 + I_4 = I_1$	}
dla węzła b :	$I_1 = I_2 + I_5$	
dla węzła c :	$I_2 = I_3 + I_6$	
dla 1 oczka :	$10 = 2I_1 + 2I_5 + 4I_4$	
dla 2 oczka :	$5 = -2I_2 + 2I_5 - 4I_3$	
dla 3 oczka :	$6 = -4I_4 - 4I_3 + 2I_6$	

9.2. METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH (OCZKOWA)

Metoda ta należy do grupy metod algorytmicznych, tzn. poddaje się pewnemu „przepisowi” postępowania. W metodzie oczkowej poszukujemy prądów gałęziowych.

Przebieg postępowania przy rozwiązywaniu obwodu prądu harmonicznego metodą oczkową jest następujący, należy:

- 1) zamienić wszystkie rzeczywiste źródła prądu występujące w obwodzie na równoważne źródła napięcia;
- 2) określić liczbę n oczek niezależnych w obwodzie:

$$n=p-q+1 \quad \{p\text{-gałęzie, } q\text{-węzły}\};$$

- 3) dokonać wyboru i oznaczenia oczek niezależnych;
- 4) ustalić zwroty prądów oczkowych;
- 5) dla każdego oczka niezależnego ułożyć równanie bilansu napięć;

$$\sum_{l=1}^n \underline{Z}_{kl} \underline{I}_l' = \underline{E}_{kk}$$

gdzie:

$\underline{Z}_{kl} \Big|_{l=k} = \underline{Z}_{kk}$ - impedancja własna oczka k , równa sumie impedancji wszystkich gałęzi występujących wzdłuż oczka k ;

$\underline{Z}_{kl} \Big|_{l \neq k} = \underline{Z}_{lk} \Big|_{k \neq l}$ - impedancja wzajemna, równa impedancji gałęzi wspólnej dla oczek k i l , wzięta ze znakiem minus jeżeli prądy oczkowe w tej gałęzi mają zwroty przeciwne;

\underline{I}_l' - prąd oczkowy w oczku l ;

\underline{E}_{kk} - napięcie źródłowe w postaci symbolicznej, oczka k określone sumą algebraiczną wszystkich symbolicznych napięć źródłowych w gałęziach należących do oczka k ; napięcie źródłowe gałęziowe przyjmuje się ze znakiem plus, jeżeli zwrot tego napięcia źródłowego jest zgodny ze zwrotem prądu oczkowego, natomiast ze znakiem minus, jeżeli zwrot napięcia źródłowego i zwrot prądu oczkowego są przeciwne.

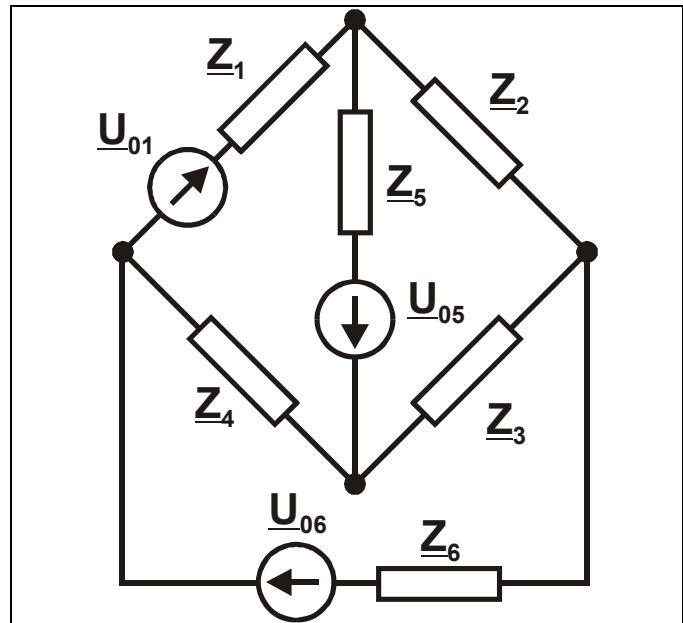
- 6) dokonać rozwiązania układu równań, stosując jedną ze znanych metod, np. rugowania zmiennych, wyznaczników lub macierzową;
- 7) ustalić zwroty prądów gałęziowych a następnie obliczyć ich wartości.

PRZYKŁAD 9.1

Procedurę postępowania w metodzie oczkowej (dla obwodu prądu sinusoidalnego) zilustrujemy dla przykładowej sieci.

- 1) **zamienić wszystkie rzeczywiste źródła prądu występujące w obwodzie na równoważne źródła napięcia;**

nie dotyczy



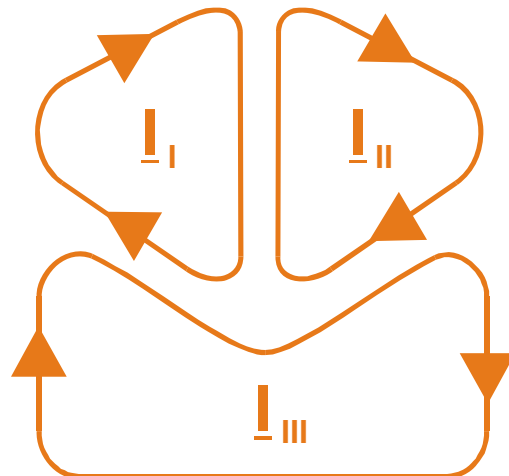
- 2) **określić liczbę n oczek niezależnych w obwodzie;**

z zależności (9.1): $n = g - w + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ { g -gałęzie, w -węzły};

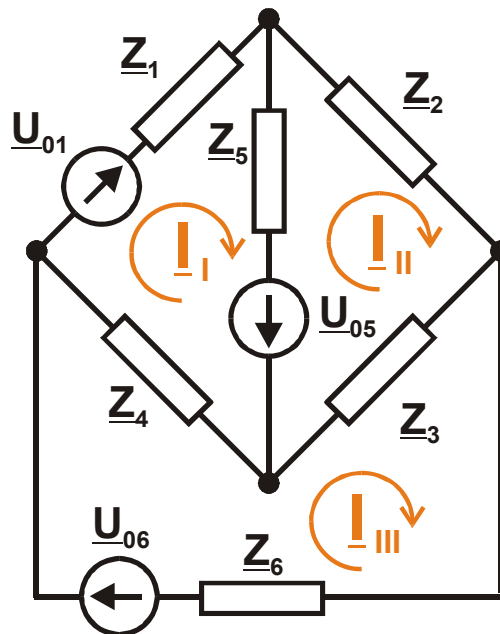
- 3) **dokonać wyboru i oznaczenia oczek niezależnych;**

- 4) **ustalić zwroty prądów oczkowych;**

Przyjmujemy w wybranych oczkach istnienie umownych prądów oczkowych o dowolnych zwrotach.



- 5) **dla każdego niezależnego oczka ułożyć równanie bilansu napięć (NPK) uwzględniając tylko prądy oczkowe;**



$$\text{Dla I oczka: } (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_4)I_I - \underline{Z}_5 I_{II} - \underline{Z}_4 I_{III} = \underline{U}_{01} + \underline{U}_{05}$$

$$\text{Dla II oczka: } -\underline{Z}_5 I_I + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5)I_{II} - \underline{Z}_3 I_{III} = -\underline{U}_{05}$$

$$\text{Dla III oczka: } -\underline{Z}_4 I_I - \underline{Z}_3 I_{II} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_4)I_{III} = \underline{U}_{06}$$

6) dokonać rozwiązania układu równań, stosując jedną ze znanych metod, np. rugowania zmiennych, wyznaczników lub macierzową;

Rozwiązując powyższy układ równań metodą macierzową, możemy napisać:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_4 & -\underline{Z}_5 & -\underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_3 \\ -\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{01} + \underline{U}_{05} \\ -\underline{U}_{05} \\ \underline{U}_{06} \end{bmatrix}$$

Ogólnie, postać macierzy jest następująca:

$$\underline{Z} \underline{I}_X = \underline{U}_0 \quad (9.3)$$

Macierz impedancji oczkowych \underline{Z} jest macierzą kwadratową, symetryczną i nieosobliwą ($\det \neq 0$).

\underline{Z}_{kk} = (def.) impedancja własna oczka „k” – jest to suma impedancji występujących w danym oczku (ze znakiem plus).

$$\underline{Z}_{kk} > 0$$

\underline{Z}_{kl} = (def.) impedancja wzajemna, równa sumie impedancji występujących gałęzi wspólnej dla oczek „k” i „l”, wzięta ze znakiem minus jeżeli prądy oczkowe w tej gałęzi mają zwroty przeciwne;

$$\underline{Z}_{kl} = \underline{Z}_{lk}$$

Macierz \underline{I}_X jest macierzą kolumnową prądów oczkowych.

Macierz \underline{U}_0 jest macierzą kolumnową napięć źródłowych w kolejnych oczkach, napięcie źródłowe oczka „k” określone jest sumą algebraiczną wszystkich symbolicznych napięć źródłowych w gałęziach należących do oczka „k”; napięcie źródłowe gałęziowe przyjmuje się ze znakiem plus, jeżeli zwrot tego napięcia źródłowego jest zgodny ze zwrotem prądu oczkowego, natomiast ze znakiem minus, jeżeli zwrot napięcia źródłowego i zwrot prądu oczkowego są przeciwne.

Rozwiązanie układu równań:

Mnożymy lewostronnie równanie 9.3 przez macierz odwrotną \underline{Z}^{-1}

$$\underline{Z}^{-1} \underline{U}_0 = \underline{Z}^{-1} \underline{Z} \underline{I}_X \quad (9.4)$$

ponieważ $\underline{Z}^{-1} \underline{Z} = \underline{I}$, otrzymujemy ostatecznie

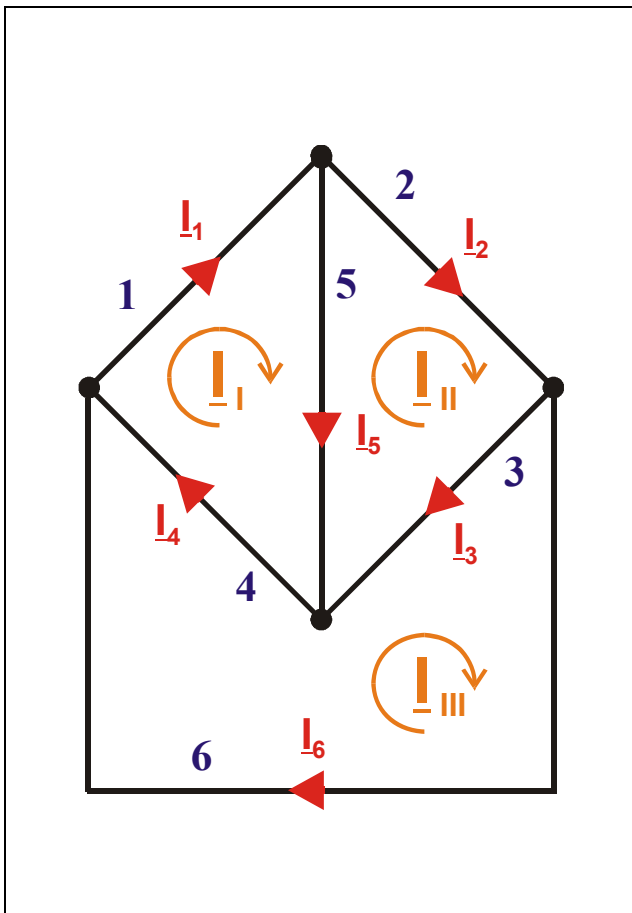
$$\underline{I}_X = \underline{Z}^{-1} \underline{U}_0 \quad (9.5)$$

znajdując tym samym prądy oczkowe.

7) ustalić zwroty prądów gałęziowych i obliczyć ich wartości.

Do tego celu pomocny jest graf (skierowany) obwodu, na którym DOPIERO TERAZ nanosimy (w sposób dowolny) zwroty prądów gałęziowych.

Sposób 1



Prądy w gałęziach zewnętrznych oczek określone są przez prądy oczkowe (obwodowe) tych oczek z odpowiednim znakiem.

W naszym przykładzie

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{II}$$

$$\underline{I}_6 = \underline{I}_{III}$$

Prądy w gałęziach wspólnych dla dwóch lub więcej oczek są sumą algebraiczną prądów tych oczek, czyli:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{II} - \underline{I}_{III}$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_I - \underline{I}_{III}$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_I - \underline{I}_{II}$$

Sposób 2

Prądy gałęziowe możemy obliczyć również wykorzystując metodą incydencji prądowej. Macierz prądów gałęziowych \underline{I}_g wyznaczamy w oparciu o macierz prądów oczkowych \underline{I}_X korzystając z macierzy łączącej prądowej α :

$$\underline{I}_g = \alpha \underline{I}_X \quad (9.6)$$

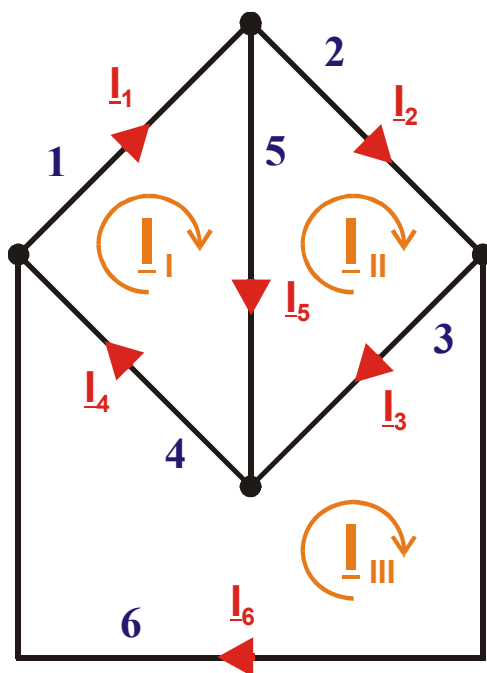
Elementy macierzy łączącej prądowej α przyjmują wartość +1, -1 lub 0

$\alpha_{gk} = 1$ jeśli gałąź „g” jest incydentna z oczkiem „k” (tzn. należy do oczka „k”) oraz zgodnie z nim skierowana

-1 j.w., lecz skierowana przeciwnie

0 jeśli gałąź „g” nie jest incydentna z oczkiem „k”

W naszym przykładzie α



		numer oczka		
		I	II	III
numer gałęzi	1	1	0	0
	2	0	1	0
	3	0	1	-1
	4	1	0	-1
	5	1	-1	0
	6	0	0	1

PRZYKŁAD 9.2

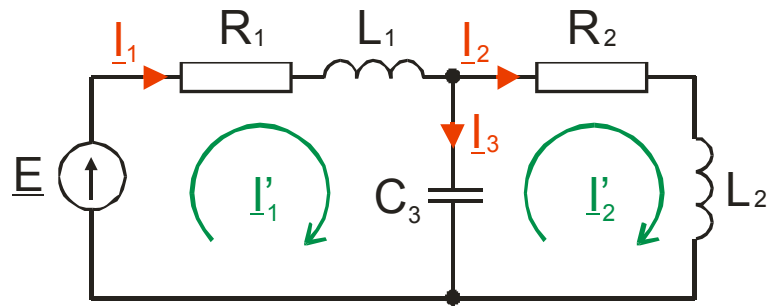
Obliczyć wartości prądów w gałęziach obwodu – dane: $\underline{E} = j100\text{V}$

$$R_1 = 150\Omega, R_2 = 100\Omega$$

$$X_1 = \omega L_1 = 400\Omega,$$

$$X_2 = \omega L_2 = 250\Omega,$$

$$X_3 = 1/\omega C_3 = 250\Omega,$$



Ad.5) układamy równanie bilansu napięć dla każdego oczka niezależnego

$$\begin{cases} [R_1 + j(X_1 - X_3)] \underline{I}_1' - (-jX_3) \underline{I}_2' = \underline{E} \\ -(-jX_3) \underline{I}_1' + [R_2 + j(X_2 - X_3)] \underline{I}_2' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (150 + j150) \underline{I}_1' + j250 \underline{I}_2' = j100 \\ j250 \underline{I}_1' + 100 \underline{I}_2' = 0 \end{cases}$$

Ad.6) dokonujemy rozwiązania układu równań metodą wyznaczników

$$W_G = \begin{vmatrix} 150 + j150 & j250 \\ j250 & 100 \end{vmatrix} = 77500 + j15000$$

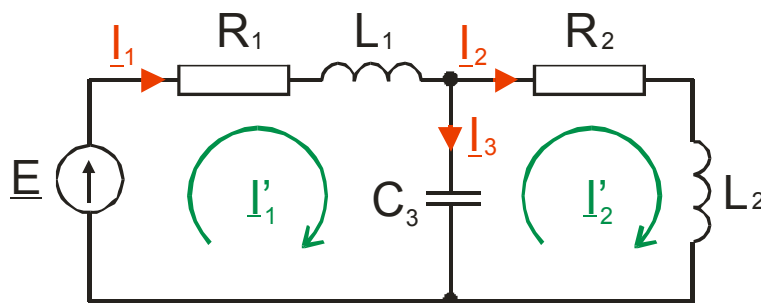
$$W_1 = \begin{vmatrix} j100 & j250 \\ 0 & 100 \end{vmatrix} = j10000$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 150 + j150 & j100 \\ j250 & 0 \end{vmatrix} = 25000$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1' &= \frac{W_1}{W_G} = \frac{j10000}{77500 + j15000} = \frac{j100}{775 + j150} \\ &= \frac{j100(775 - j150)}{775^2 + 150^2} = \frac{j77500 + 15000}{623125} \\ &= 0,0241 + j0,124 = 0,126 e^{j79^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_2' &= \frac{W_2}{W_G} = \frac{25000}{77500 + j15000} = \frac{250}{775 + j150} \\ &= \frac{250(775 - j150)}{775^2 + 150^2} = \frac{193750 - j37500}{623125} \\ &= 0,311 - j0,0602 = 0,317 e^{-j11^\circ}\end{aligned}$$

Ad.7) mając ustalone zwroty prądów gałęziowych - obliczamy ich wartości



$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' \quad ; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2' \quad ; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1' - \underline{I}_2'$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= (0,0241 + j0,124) - (0,311 - j0,0602) = -0,2869 + j0,1842 \\ &= 0,341 e^{j\left(\pi - \arctg \frac{0,1842}{0,2869}\right)} = 0,341 e^{j147,3^\circ}\end{aligned}$$

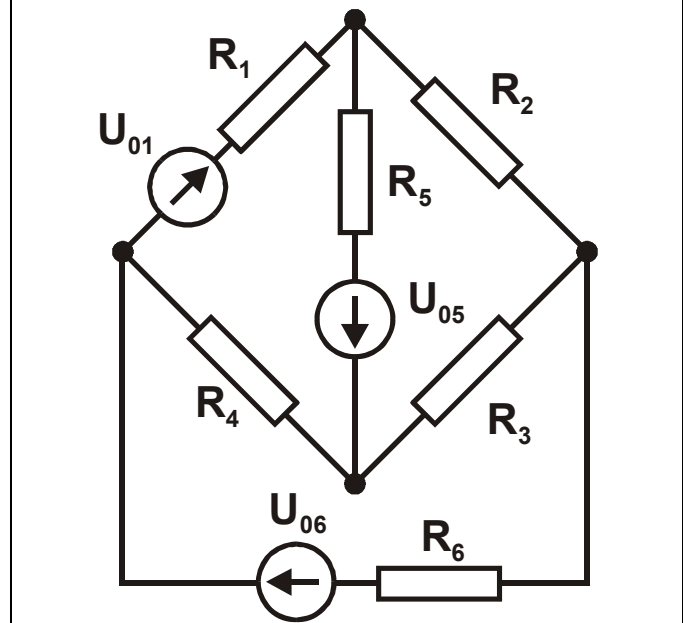
PRZYKŁAD 9.3

Procedurę postępowania w metodzie oczkowej (dla obwodu prądu stałego) zilustrujemy dla przykładowej sieci.

- 1) **zamienić wszystkie rzeczywiste źródła prądu występujące w obwodzie na równoważne źródła napięcia;**

nie dotyczy

Dane : $U_{01}=U_{05}=5V$, $U_{06}=6V$
 $R_1=R_2=R_5=R_6=2\Omega$; $R_3=R_4=4\Omega$.



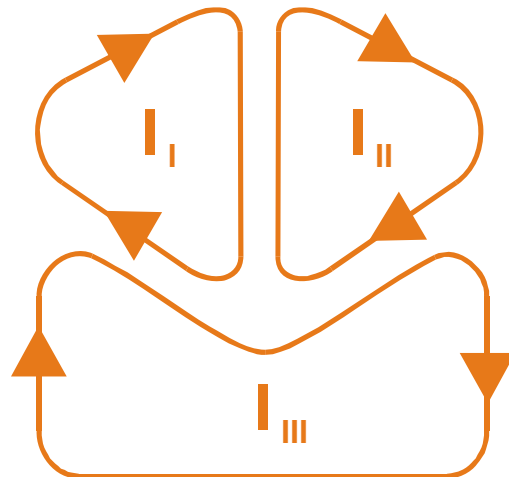
- 2) **określić liczbę n oczek niezależnych w obwodzie;**

z zależności (5.1): $n = g - w + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ { g -gałęzie, w -węzły};

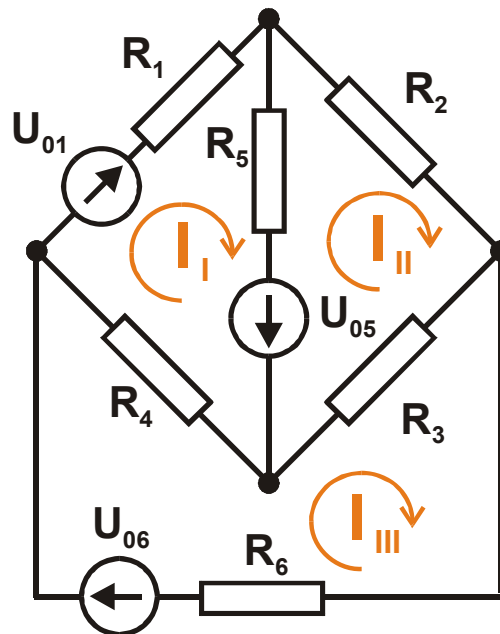
- 3) **dokonać wyboru i oznaczenia oczek niezależnych;**

- 4) **ustalić zwroty prądów oczkowych;**

Przyjmujemy w wybranych oczkach istnienie umownych prądów oczkowych o dowolnych zwrotach.



- 5) **dla każdego niezależnego oczka ułożyć równanie bilansu napięć (NPK) uwzględniając tylko prądy oczkowe;**



Dla I oczka: $(R_1 + R_5 + R_4)I_I - R_5I_{II} - R_4I_{III} = U_{01} + U_{05}$

Dla II oczka: $-R_5I_I + (R_2 + R_3 + R_5)I_{II} - R_3I_{III} = -U_{05}$

Dla III oczka: $-R_4I_I - R_3I_{II} + (R_3 + R_6 + R_4)I_{III} = U_{06}$

6) dokonać rozwiązania układu równań, stosując jedną ze znanych metod, np. rugowania zmiennych, wyznaczników lub macierzową;

Rozwiązując powyższy układ równań metodą macierzową, możemy napisać:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 + R_4 & -R_5 & -R_4 \\ -R_5 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_3 \\ -R_4 & -R_3 & R_3 + R_6 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{01} + U_{05} \\ -U_{05} \\ U_{06} \end{bmatrix}$$

Ogólnie, postać macierzy jest następująca:

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_X = \mathbf{U}_0$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\mathbf{I}_X = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_0$$

Macierz rezystancji oczkowych $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

stąd $\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,229 & 0,129 & 0,143 \\ 0,129 & 0,229 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,214 \end{bmatrix}$

natomiast $\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$

Zatem

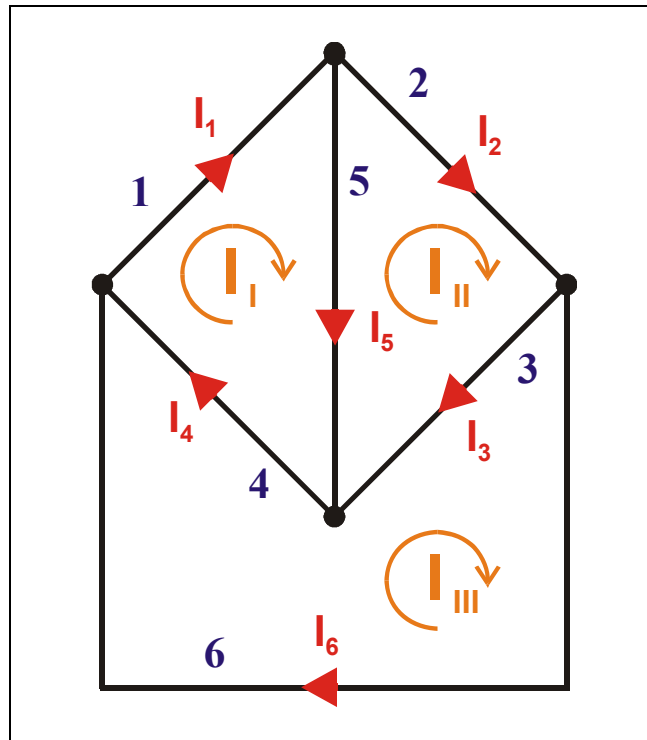
macierz prądów oczkowych: $\mathbf{I}_X = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

czyli **prądy oczkowe**:

$$I_I = 2,5\text{A}, I_{II} = 1\text{A}, I_{III} = 2\text{A}$$

7) ustalić zwroty prądów gałęziowych i obliczyć ich wartości.

Do tego celu pomocny jest graf (skierowany) obwodu, na którym DOPIERO TERAZ nanosimy (w sposób dowolny) zwroty prądów gałęziowych.



Sposób 1

Prądy w gałęziach zewnętrznych oczek określone są przez prądy oczkowe (obwodowe) tych oczek z odpowiednim znakiem:

$$I_1 = I_I = 2,5$$

$$I_2 = I_{II} = 1$$

$$I_6 = I_{III} = 2$$

Prądy w gałęziach wspólnych dla dwóch lub więcej oczek są sumą algebraiczną prądów tych oczek:

$$I_3 = I_{II} - I_{III} = -1$$

$$I_4 = I_I - I_{III} = 0,5$$

$$I_5 = I_I - I_{II} = 1,5$$

Sposób 2

Macierz prądów gałęziowych I_g wyznaczamy w oparciu o macierz prądów oczkowych I_X korzystając z macierzy łączącej prądowej α :

$$I_g = \alpha I_X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 1 \\ -1 \\ 0,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

9.3. METODA NAPIĘĆ WĘZŁOWYCH (WĘZŁOWA)

Metoda ta także należy do grupy metod algorytmicznych. W metodzie węzłowej poszukujemy napięć gałęziowych.

Przebieg postępowania przy rozwiązywaniu obwodu prądu harmonicznego metodą węzłową jest następujący, należy:

- 1) zamienić wszystkie rzeczywiste źródła napięcia występujące w obwodzie na równoważne źródła prądu;
- 2) określić liczbę m niezależnych węzłów w obwodzie:

$$m = w - 1 \text{ \{w-węzły\}};$$
- 3) dokonać wyboru i oznaczenia węzłów niezależnych;
- 4) ustalić zwroty napięć węzłowych;
- 5) dla każdego węzła niezależnego ułożyć równanie bilansu prądów;

$$\sum_{l=1}^m \underline{Y}_{kl} \underline{U}_l' = \underline{I}_{zk}$$

gdzie:

$\underline{Y}_{kl}|_{l=k} = \underline{Y}_{kk}$ - admitancja własna węzła k , równa sumie admitancji gałęzi dołączonych do węzła k ;

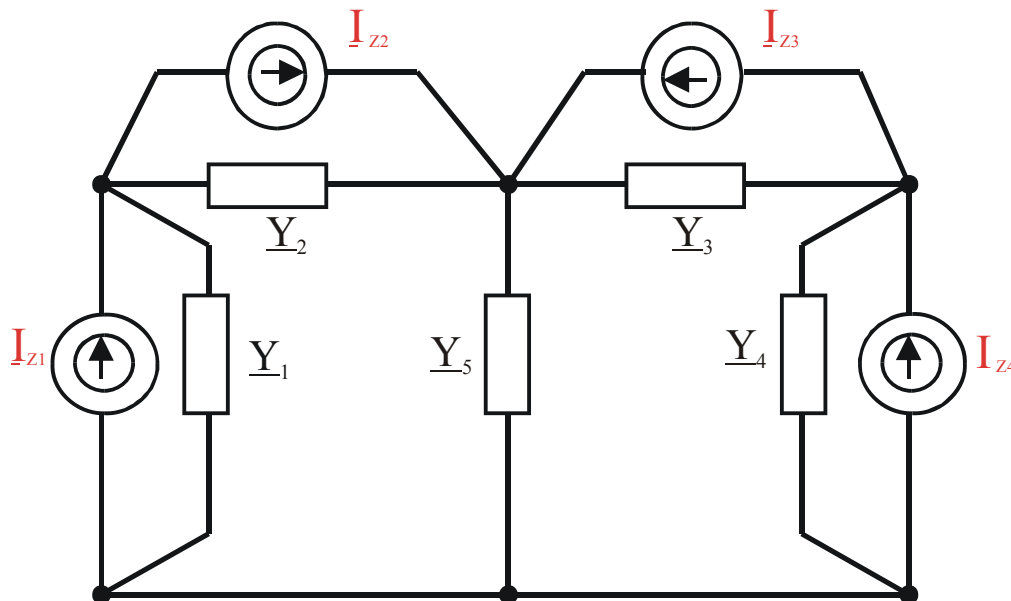
$\underline{Y}_{kl}|_{l \neq k} = \underline{Y}_{lk}|_{k \neq l}$ - admitancja wzajemna węzłów k i l , równa sumie admitancji wszystkich gałęzi łączących k -ty węzeł z l -tym, wzięta ze znakiem minus;

\underline{U}_l' - napięcie zespolone węzła l , określone względem węzła odniesienia;

\underline{I}_{zk} - wypadkowy prąd źródłowy węzła k w postaci symbolicznej, równy sumie algebraicznej wszystkich symbolicznych prądów źródłowych w gałęziach należących do k -tego węzła; prąd źródłowy gałęziowy przyjmuje się ze znakiem plus, jeżeli zwrot tego prądu źródłowego jest do węzła k , a ze znakiem minus w przypadku przeciwnym.

- 6) dokonać rozwiązania układu równań, stosując jedną ze znanych metod, np. rugowania zmiennych, wyznaczników lub macierzową;
- 7) ustalić zwroty prądów gałęziowych a następnie obliczyć ich wartości.

Procedurę postępowania w metodzie węzłowej (dla obwodu prądu sinusoidalnego) zilustrujemy dla przykładowej sieci.



Należy:

- 1) zamienić wszystkie źródła napięcia występujące w obwodzie na równoważne źródła prądu;

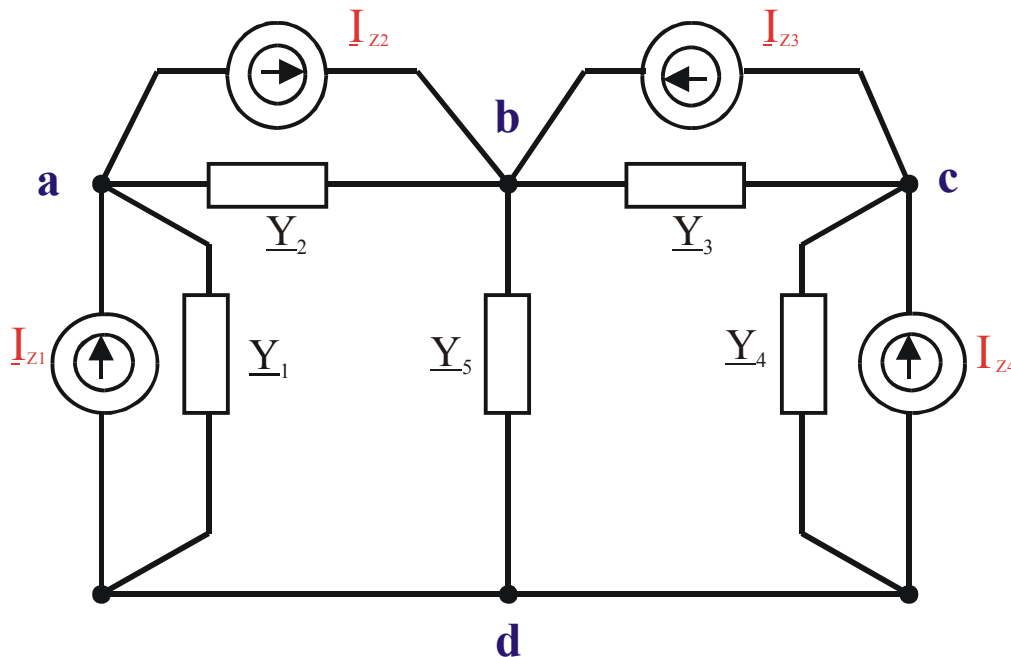
nie dotyczy

- 2) określić liczbę m niezależnych węzłów w obwodzie;

z zależności (8.2): $m = w - 1 = 4 - 1 = 3$ $\{w\text{-węzły}\}$;

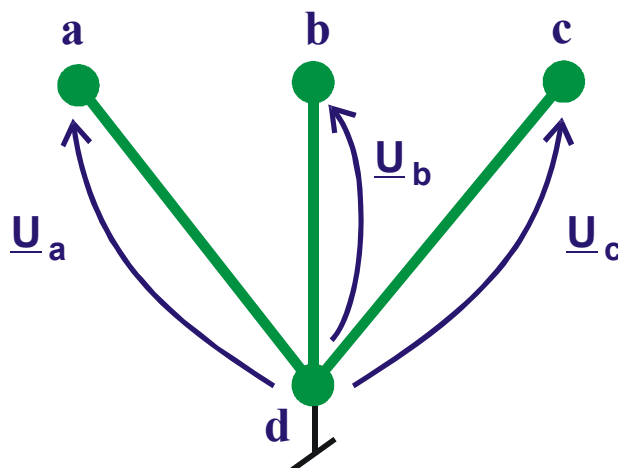
3) dokonać wyboru i oznaczenia węzłów niezależnych;

m niezależnymi węzłami są węzły a , b , c – natomiast w -ty węzeł oznaczony jako d jest węzłem odniesienia;

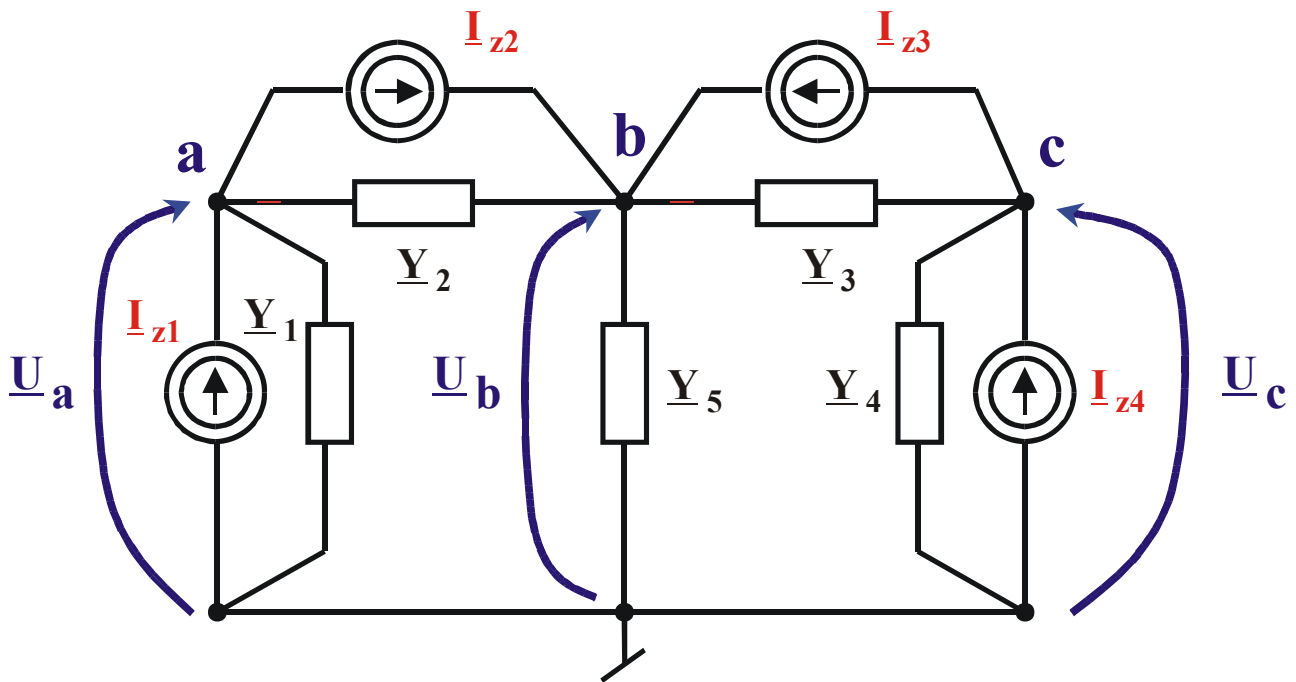


4) ustalić zwroty napięć węzłowych;

Przyjmujemy istnienie napięć międzywęzłowych (pomiędzy węzłami niezależnymi a , b , c a uziemionym węzłem odniesienia d) o zwrotach do węzłów niezależnych.



- 5) dla każdego niezależnego węzła ułożyć równanie bilansu prądów (PPK) uwzględniając tylko napięcia węzłowe;



Dla węzła **a**: $(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U}_a - \underline{Y}_2 \underline{U}_b - 0 \underline{U}_c = \underline{I}_{z1} - \underline{I}_{z2}$

Dla węzła **b**: $-\underline{Y}_2 \underline{U}_a + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5) \underline{U}_b - \underline{Y}_3 \underline{U}_c = \underline{I}_{z2} + \underline{I}_{z3}$

Dla węzła **c**: $0 \underline{U}_a - \underline{Y}_3 \underline{U}_b + (\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \underline{U}_c = \underline{I}_{z4} - \underline{I}_{z3}$

- 6) dokonać rozwiązania układu równań, stosując jedną ze znanych metod, np. rugowania zmiennych, wyznaczników lub macierzową;

Rozwiązując powyższy układ równań metodą macierzową, piszemy:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 & 0 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_3 \\ 0 & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{z1} - \underline{I}_{z2} \\ \underline{I}_{z2} + \underline{I}_{z3} \\ \underline{I}_{z4} - \underline{I}_{z3} \end{bmatrix}$$

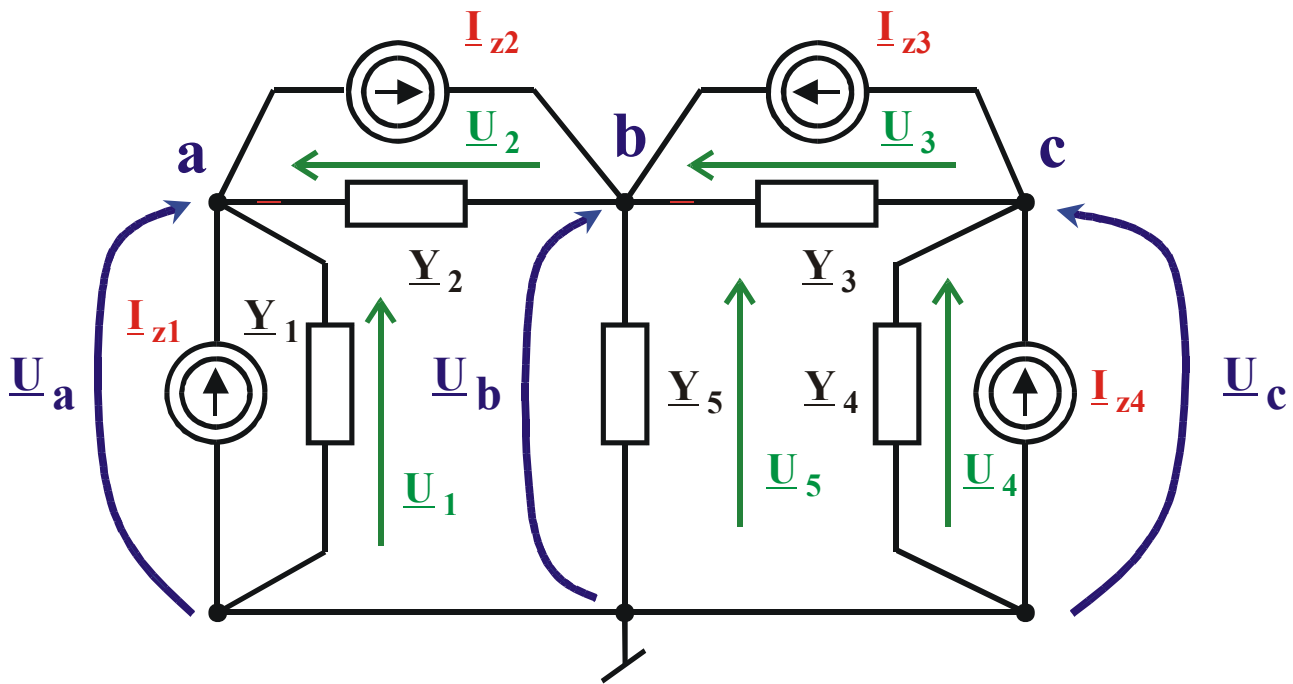
Ogólnie, postać macierzy jest następująca:

$$\underline{Y} \underline{U}_x = \underline{I}_z \quad (9.7)$$

po przekształceniach

$$\underline{U}_x = \underline{Y}^{-1} \underline{I}_z \quad (9.8)$$

7) ustalić zwroty napięć gałęziowych i obliczyć ich wartości.



Sposób 1

Jeżeli gałąź łączy węzeł odniesienia z węzłem niezależnym, wówczas napięcie gałęziowe równe jest liczbowo napięciu węzłowemu (z odpowiednim znakiem). Czyli:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_a$$

$$\underline{U}_4 = \underline{U}_c$$

$$\underline{U}_5 = \underline{U}_b$$

Natomiast napięcie na gałęzi łączącej węzły niezależne jest równe algebraicznej sumie napięć węzłowych tych węzłów. Otrzymamy więc:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_a - \underline{U}_b$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_b - \underline{U}_c$$

Sposób 2

Napięcia gałęziowe możemy obliczyć również wykorzystując metodą incydencji napięciowej. Macierz napięć gałęziowych \underline{U}_g wyznaczamy w oparciu o macierz napięć węzłowych \underline{U}_x korzystając z macierzy łączącej napięciowej β :

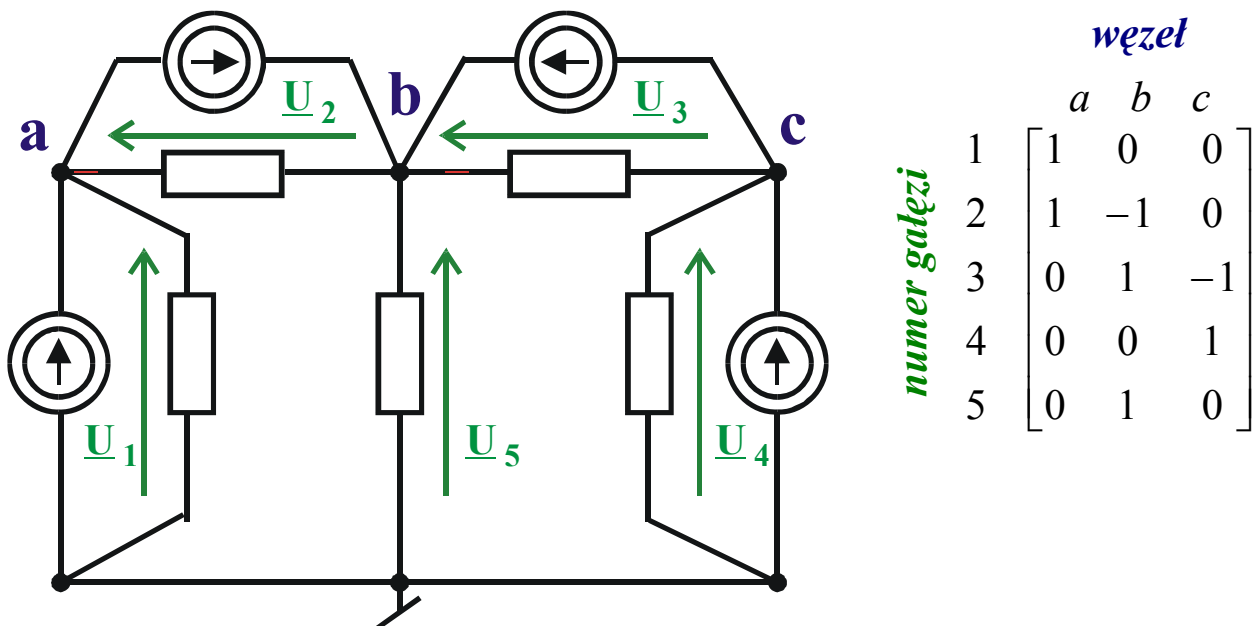
$$\underline{U}_g = \beta \underline{U}_x \quad (9.9)$$

Elementy macierzy łączącej napięciowej β przyjmują wartość +1, -1 lub 0

$\beta_{gk} = 1$ jeśli gałąź „g” jest incydentna z węzłem „k” (tzn. węzeł „k” jest końcówką gałęzi „g”) oraz grot napięcia w gałęzi „g” jest zwrócony do węzła „k”.

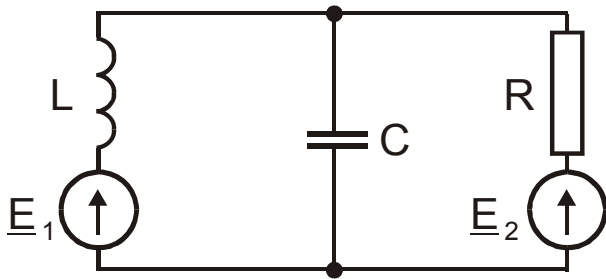
-1 j.w., lecz napięcie ma zwrot przeciwny

0 jeśli gałąź „g” nie jest incydentna z węzłem „k”



UWAGA: Znajomość napięć gałęziowych pozwala na wyznaczenie prądów gałęziowych

Przykład 9.4: Stosując metodę węzłową, obliczyć wartości prądów w gałęziach obwodu.



Dane:

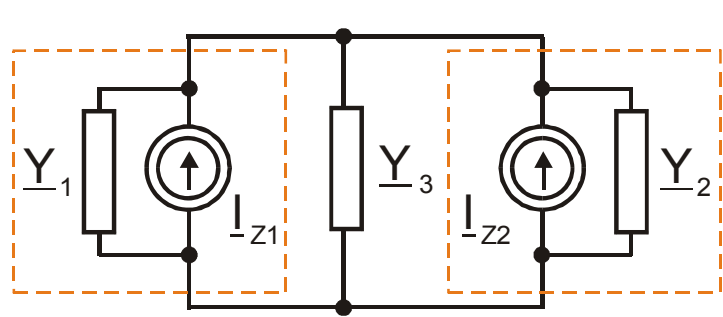
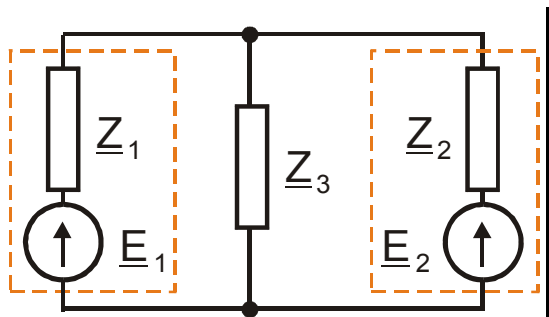
$$\underline{E}_1 = j100\text{V}, \quad \underline{E}_2 = 60e^{j60}\text{V},$$

$$f = 50\text{ Hz},$$

$$R = 200\Omega, \quad L = 0,796\text{ H}, \quad C = 9,55\ \mu\text{F}$$

ROZWIĄZANIE:

- 1) zamiana wszystkich rzeczywistych źródeł napięcia występujące w obwodzie na równoważne źródła prądu;



$$\underline{Z}_1 = jX_L = j\omega L = j250$$

$$= 250 e^{j90} [\Omega]$$

$$\underline{E}_1 = j100 = 100 e^{j90} [V]$$

$$\underline{Y}_1 = -jB_L = -j \frac{1}{\omega L} = -j \frac{1}{250} =$$

$$= -j0,004 = 0,004 e^{-j90} [S]$$

$$\underline{I}_{z1} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \underline{E}_1 \underline{Y}_1 = 0,4 = 0,4 e^{j0} [A]$$

$$\underline{Z}_2 = R = 200 [\Omega]$$

$$\underline{E}_2 = 60 e^{j60} [V]$$

$$\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = 1/R = 0,005 [S]$$

$$\underline{I}_{z2} = \underline{E}_2 \underline{Y}_2 = \frac{\underline{E}_2}{R} = \frac{60 e^{j60}}{200} =$$

$$= 0,3 e^{j60} = 0,15 + j0,26 [A]$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{-j}{0,003}$$

$$= 333 e^{-j90} [\Omega]$$

$$\underline{Y}_3 = jB_C = j\omega C = j0,003 =$$

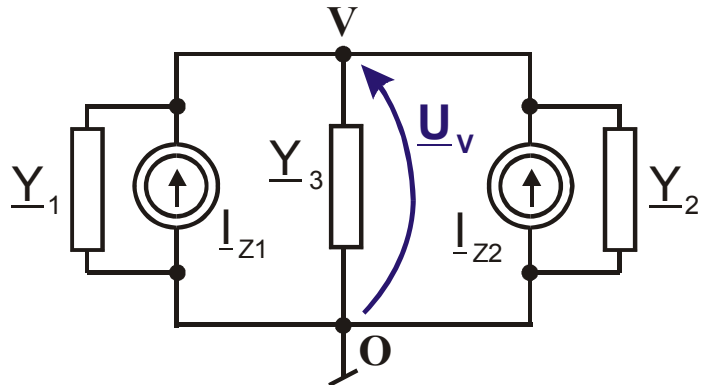
$$= 0,003 e^{j90} [S]$$

2) określenie liczby m niezależnych węzłów w obwodzie;

z zależności 9.2: $m = w - 1 = 2 - 1 = 1$ { w -węzły};

3) wybór i oznaczenie węzła niezależnego;

niezależnym węzłem jest węzeł V – natomiast węzeł oznaczony jako O jest węzłem odniesienia;



4) ustalenie zwrotu napięcia węzłowego;

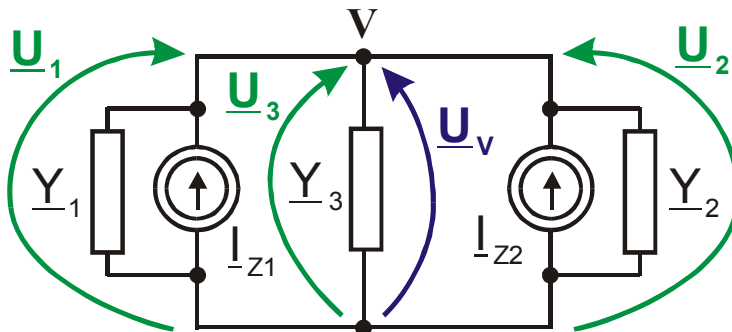
5) ułożenie dla niezależnego węzła równania bilansu prądów (PPK) uwzględniającego tylko napięcie węzłowe

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \underline{U}_V = \underline{I}_{z1} + \underline{I}_{z2}$$

6) rozwiązanie równania (wyznaczenie \underline{U}_V)

$$\begin{aligned} \underline{U}_V &= \frac{\underline{I}_{z1} + \underline{I}_{z2}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{0,4 + (0,15 + j0,26)}{-j0,004 + 0,005 + j0,003} = \frac{0,55 + j0,26}{0,005 - j0,001} = \\ &= \frac{0,608 e^{j25,3}}{0,00509 e^{-j11,3}} = 119,4 e^{j36,6} = 95,8 + j71,7 [V] \end{aligned}$$

7) ustalenie zwrotów napięć gałęziowych i obliczenie ich wartości.

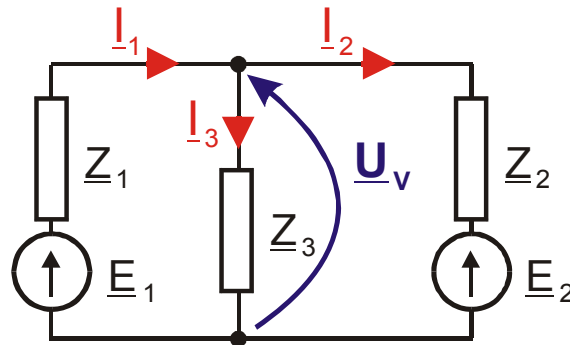


$$\underline{U}_1 = \underline{U}_V$$

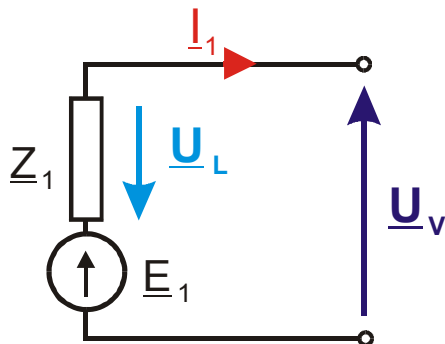
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_V$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_V$$

8) ustalenie zwrotów prądów gałęziowych i obliczenie ich wartości;

UWAGA: rozpatruje się sieć zawierającą źródła napięciowe!

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_V}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_V \underline{Y}_3 = 119,4 e^{j36,6} \cdot 0,003 e^{j90} = \\ &= 0,358 e^{j126,6} = -0,214 + j0,288 \text{ [A]} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \underline{E}_1 - \underline{U}_L - \underline{U}_V &= 0 \Rightarrow \underline{U}_L = \underline{E}_1 - \underline{U}_V \\ \underline{U}_L &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \\ \text{czyli:} \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_1 &= \underline{E}_1 - \underline{U}_V \quad \text{stąd:} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_V}{\underline{Z}_1} = (\underline{E}_1 - \underline{U}_V) \underline{Y}_1 = 0,115 + j0,383 \text{ [A]}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = \\ &= 0,115 + j0,383 - (-0,214 + j0,288) = \\ &= 0,329 + j0,095 \text{ [A]} \end{aligned}$$