

## 10. METODY NIEALGORYTMICZNE ANALIZY OBWODÓW LINIOWYCH

### 10.1. METODA TRANSFIGURACJI

Przez termin transfiguracji rozumiemy operację kolejnego uproszczenia struktury obwodu (zmniejszenie liczby gałęzi i węzłów), przy spełnionym warunku równoważności, tzn. zastępowanie struktury bardziej złożonej równoważną strukturą prostszą.

W metodzie transfiguracji wykorzystujemy wcześniej poznane zasady, zależności i twierdzenia:

- a) zasadę zastępowania układu elementów połączonych szeregowo jednym elementem równoważnym;
- b) zasadę zastępowania układu elementów połączonych równolegle jednym elementem równoważnym;
- c) zasadę zastępowania układu idealnych źródeł napięcia połączonych szeregowo jednym źródłem równoważnym;
- d) zasadę zastępowania układu idealnych źródeł prądu połączonych szeregowo jednym źródłem równoważnym;
- e) zasadę równoważności napięciowego i prądowego schematu dwójnika źródłowego.

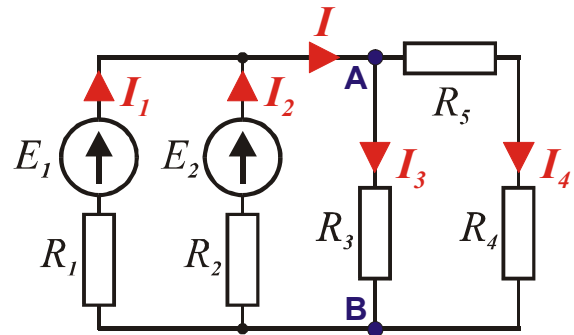
**Metoda transfiguracji polega na zwinięciu sieci rozgałęzionej do obwodu elementarnego (źródło – odbiornik), w którym określamy prąd i napięcie. Następnie przechodzimy ponownie drogę transfiguracji, lecz w kierunku odwrotnym, dochodząc do sieci pierwotnej i na każdym z etapów określamy konieczne wielkości elektryczne.**

UWAGA!

**PRZYKŁAD 6.5 – dla obwodu prądu sinusoidalnego**

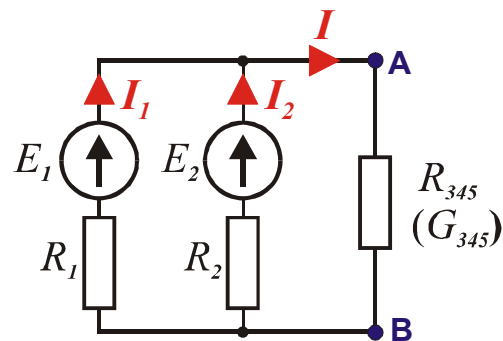
## PRZYKŁAD 10.1 – dla obwodu prądu stałego

W obwodzie przedstawionym na rysunku dwa rzeczywiste źródła napięcia o parametrach  $E_1=8,8\text{V}$ ,  $R_1=4\Omega$ ,  $E_2=11,2\text{V}$ ,  $R_2=8\Omega$ , połączone równolegle - wyznaczyć rozpyły prądów jeżeli  $R_3=6,66\Omega$ ,  $R_4=3,33\Omega$ ,  $R_5=3,33\Omega$ .



$$R_{345} = \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + (R_4 + R_5)} = 3,33[\Omega]$$

$$G_{345} = \frac{1}{R_{345}} = 0,3[\text{S}]$$

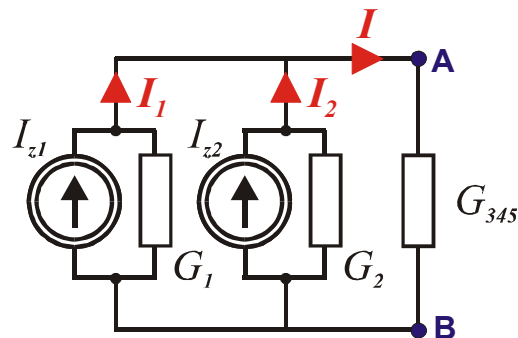


Dwa rzeczywiste źródła napięciowe zastępujemy równoważnymi źródłami prądowymi.

Parametry źródeł równoważnych:

$$I_{z1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{8,8}{4} = 2,2[\text{A}]; \quad G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{4} = 0,25[\text{S}]$$

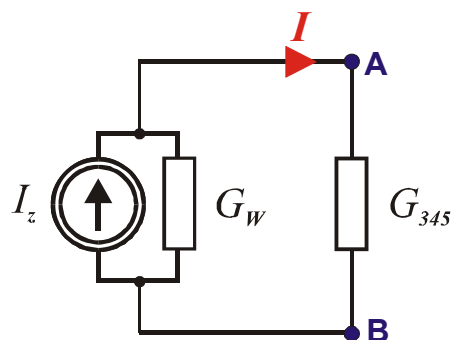
$$I_{z2} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{11,2}{8} = 1,4[\text{A}]; \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{8} = 0,125[\text{S}]$$



Dwa rzeczywiste źródła prądowe zastępujemy jednym równoważnym źródłem prądowym o parametrach:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} = 3,6[\text{A}]$$

$$G_W = G_1 + G_2 = 0,375[\text{S}]$$



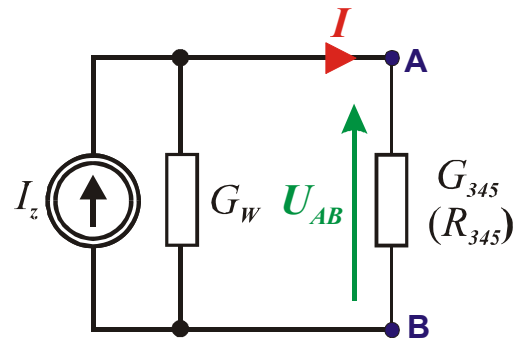
Dla zredukowanego obwodu możemy wyznaczyć:

(korzystając z dzielnika prądu)

$$I = \frac{G_{345}}{G_W + G_{345}} I_z = \frac{0,3}{0,375 + 0,3} 3,6 = 1,6 [A]$$

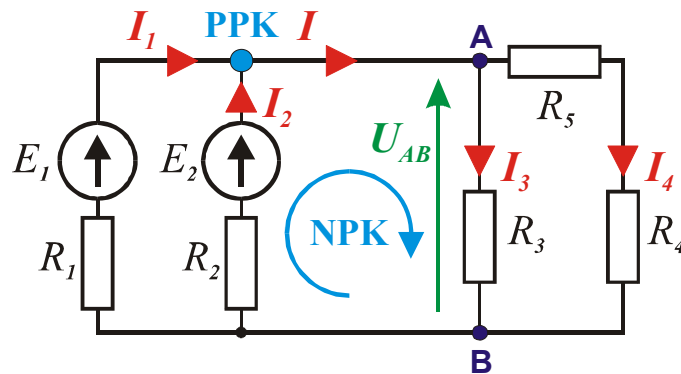
(korzystając z prawa Ohma)

$$U_{AB} = IR_{345} = \frac{I}{G_{345}} = \frac{1,6}{0,3} = 5,33 [V]$$



Przechodzimy do obwodu pierwotnego

Pozostałe prądy wyznaczamy korzystając z pierwszego rysunku i



- II prawa Kirchhoffa (NPK)

$$E_2 - R_2 I_2 - U_{AB} = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{R_2} = \frac{11,2 - 5,33}{8} = 0,734 [A]$$

- I prawa Kirchhoffa (PPK)

$$I_1 + I_2 - I = 0 \Rightarrow I_1 = I - I_2 = 1,6 - 0,734 = 0,866 [A]$$

- prawa Ohma

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{5,33}{6,66} = 0,8 [A] ; I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4 + R_5} = \frac{5,33}{3,33 + 3,33} = 0,8 [A]$$

## 10.2. METODA SUPERPOZYCJI

Metodę superpozycji stosuje się do obwodów, w których występują co najmniej dwa źródła niezależne.

Metoda superpozycji wywodzi się z **zasady superpozycji**,

**Odpowiedź obwodu na jednoczesne działanie zbioru wymuszeń  
jest równa  
sumie odpowiedzi na każde wymuszenie działające osobno**

którą można sformułować nieco inaczej – mianowicie:

**Prąd (napięcie) w wyróżnionej gałęzi obwodu liniowego, w którym występuje kilka źródeł niezależnych, może być obliczony jako suma prądów (napięć) wywołanych w tej gałęzi przez każde z tych źródeł działających osobno, tzn. po wyzerowaniu wszystkich pozostałych źródeł niezależnych (zastąpieniu źródeł napięcia zwarciami a źródeł prądowych rozwarciem).**

Inaczej:

- Metoda superpozycji sprowadza się do analizy tylu obwodów ile występuje źródeł niezależnych w obwodzie pierwotnym.
- Odpowiedź całkowita w danej gałęzi (prąd lub napięcie) jest sumą poszczególnych odpowiedzi wymuszanych poszczególnymi źródłami niezależnymi.

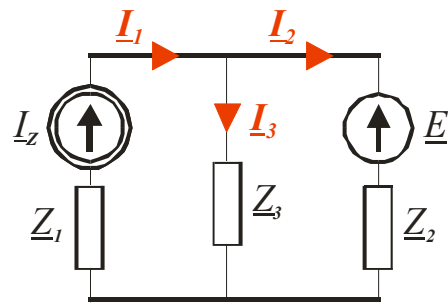
## PRZYKŁAD 10.2 – dla obwodu prądu sinusoidalnego

Wyznaczyć rozptyw prądów w obwodzie, jeśli:

$$\underline{I}_Z = 0,4 \text{ A}, \underline{E} = 60 e^{j60^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{Z}_1 = j25 \Omega, \underline{Z}_2 = j20 \Omega,$$

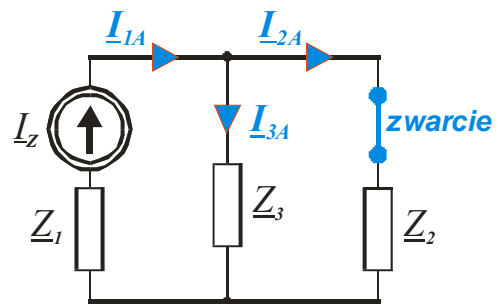
$$\underline{Z}_3 = -j30 \Omega.$$



**A) Przyjmujemy:**

$$\underline{I}_Z = 0,4 \text{ A}, \underline{E} = 0 \text{ (zwarcie)}$$

oraz nanosimy zwroty prądów składowych  $\underline{I}_{1A}$ ,  $\underline{I}_{2A}$ ,  $\underline{I}_{3A}$  – powstałych w wyniku działania tylko źródła prądu.



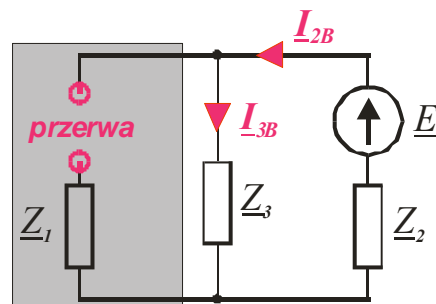
Wyznaczamy:  $\underline{I}_{1A} = \underline{I}_Z$

$$\underline{I}_{2A} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \underline{I}_Z = \dots, \quad \underline{I}_{3A} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \underline{I}_Z = \dots$$

**B) Przyjmujemy:**

$$\underline{E} = 60 e^{j60^\circ} \text{ V}, \underline{I}_Z = 0 \text{ (rozwarcie)}$$

oraz nanosimy zwroty prądów składowych  $\underline{I}_{2B}$ ,  $\underline{I}_{3B}$  – powstałych w wyniku działania tylko źródła napięcia.



Wyznaczamy:  $\underline{I}_{2B} = \underline{I}_{3B} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \dots$

**C) Nakładamy na siebie schematy z p. A) oraz B) i określamy prądy gałęziowe:**

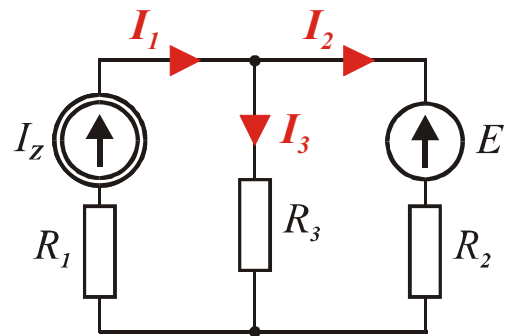
$$\underline{I}_{1A} = \underline{I}_Z = 0,4 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2A} - \underline{I}_{2B} = \dots$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{3A} + \underline{I}_{3B} = \dots$$

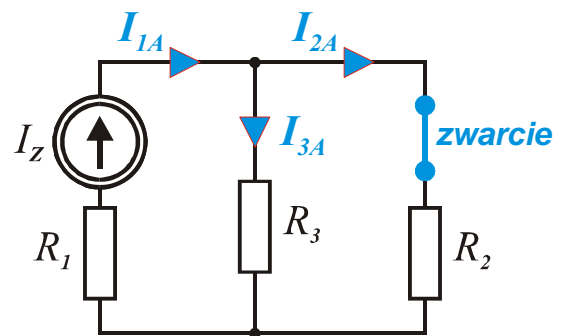
### PRZYKŁAD 10.3 – dla obwodu prądu stałego

Wyznaczyć rozptyw prądów w obwodzie, jeśli:  $I_Z=5A$ ,  $E=10V$ ,  $R_1=1\Omega$ ,  $R_2=10\Omega$ ,  $R_3=5\Omega$ .



**A) Przyjmujemy:**  
 $I_Z=5A$ ,  $E=0$  (zwarcie)

oraz nanosimy zwroty prądów składowych  $I_{1A}$ ,  $I_{2A}$ ,  $I_{3A}$  – powstałych w wyniku działania tylko źródła prądu.

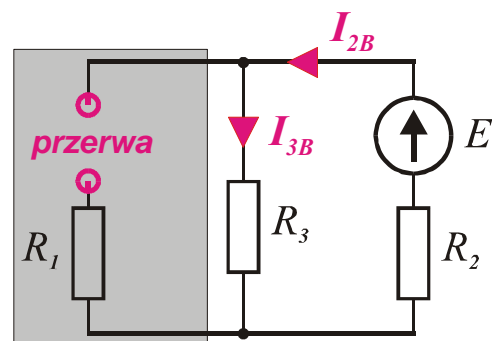


Wyznaczamy:  $I_{1A} = I_Z = 5A$

$$I_{2A} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_Z = \frac{5}{3} [A], \quad I_{3A} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_Z = \frac{10}{3} [A]$$

**B) Przyjmujemy:**  
 $E=10V$ ,  $I_Z=0$  (rozwarcie)

oraz nanosimy zwroty prądów składowych  $I_{2B}$ ,  $I_{3B}$  – powstałych w wyniku działania tylko źródła napięcia.



Wyznaczamy:  $I_{2B} = I_{3B} = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{2}{3} [A]$

**C) Nakładamy na siebie schematy z p. A) oraz C) i określamy prądy gałęziowe:**

$$I_{1A} = I_Z = 5A$$

$$I_2 = I_{2A} - I_{2B} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1 [A]$$

$$I_3 = I_{3A} + I_{3B} = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = 4 [A]$$

## 10.3. METODA ZASTĘPCZEGO GENERATORA (ŹRÓDŁA)

Niejednokrotnie w złożonych obwodach elektrycznych:

- interesują nas wielkości elektryczne związane z **jedną wybraną gałęzią**,
- bądź interesuje nas analiza stanu elektrycznego w **obciążeniu** (stałym bądź regulowanym) zasilanym ze złożonego układu zasilania.

**Nie ma wówczas potrzeby dokonywania pełnej analizy sieci!**

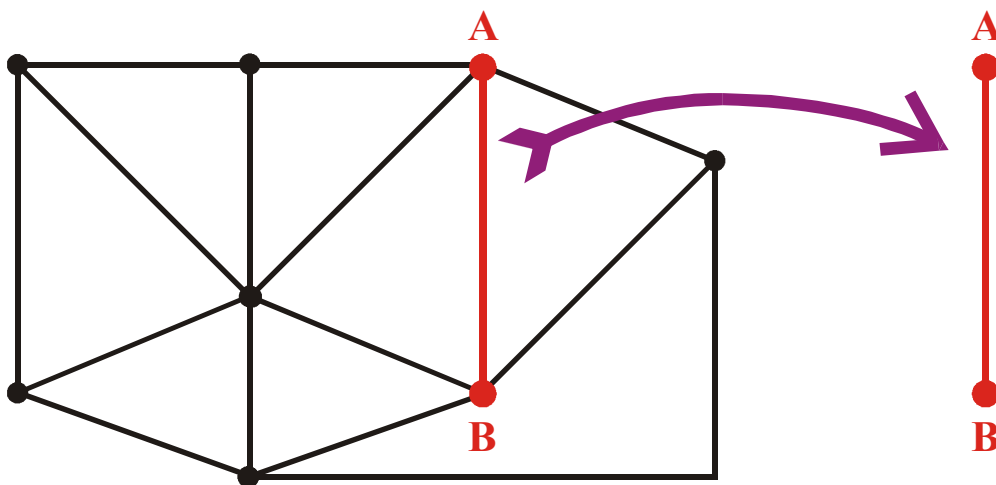
(wyznaczania wielkości elektrycznych gałęziowych, nie interesujących nas z punktu widzenia sformułowanego celu szczegółowego)

Rozpatrzmy graf sieci elektrycznej, składający się z różnych (dowolnych) gałęzi. Przyjmijmy, że poszukujemy prądu i napięcia gałęziowego w jednej wybranej gałęzi  $AB$  (szukamy  $I_{AB}$  oraz  $U_{AB}$ ).

**Gałąź  $AB$**  może być zarówno gałęzią bezźródłową opisywaną funkcją impedancji  $Z_X$  lub admitancji  $Y_X$ , jak i gałęzią źródłową opisywaną parą:  $U_{oX}$ ,  $Z_X$  lub  $I_{sX}$ ,  $Y_X$ .

Natomiast po „wyjęciu” gałęzi  $AB$  z punktu widzenia zacisków  $A$ - $B$

**pozostała część sieci** stanowi złożony układ zasilania - dwójnik źródłowy.



Oznacza to, że z punktu widzenia gałęzi  $AB$  **pozostałą część obwodu**, będącą dwójnikiem aktywnym, **można zastąpić schematem równoważnym zgodnie z**

- twierdzeniem o zastępczym generatorze (źródle) napięcia**

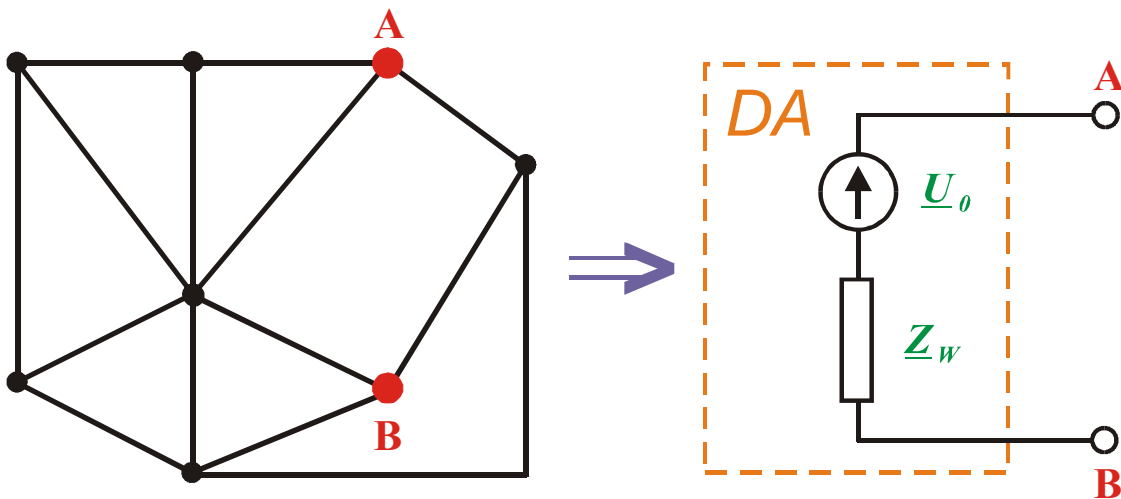
Każdy dwójnik aktywny prądu harmonicznego jest równoważny gałęzi aktywnej zawierającej:

idealne źródło napięcia harmonicznego o symbolicznej wartości  $\underline{U}_O$ , odpowiadającej napięciu dwójnika w stanie jałowym

i połączony z nim szeregowo dwójnik pasywny o symbolicznej impedancji  $\underline{Z}_W$ , określonej stosunkiem symbolicznych wartości napięcia źródłowego  $\underline{U}_O$  i prądu zwarcia  $\underline{I}_Z$  dwójnika

$$\underline{Z}_W = \frac{\underline{U}_O}{\underline{I}_Z}$$

(10.1)





**LUB**

z punktu widzenia gałęzi  $AB$  pozostałą część obwodu, będącą dwójnikiem aktywnym, można zastąpić schematem równoważnym zgodnie z

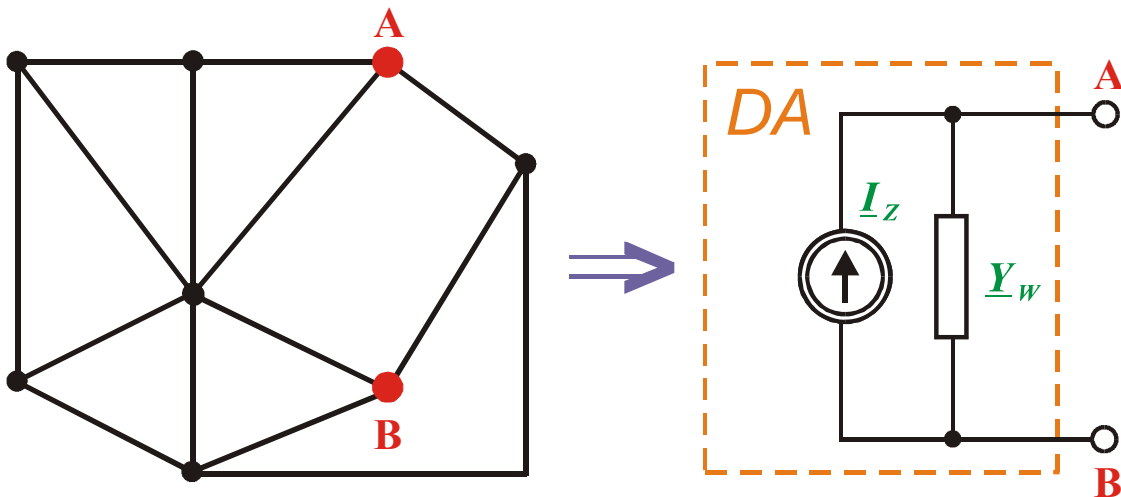
- **twierdzeniem o zastępczym generatorze (źródle) prądu**

Każdy dwójnik aktywny prądu harmonicznego jest równoważny gałęzi aktywnej utworzonej z

idealnego źródła prądu harmonicznego o symbolicznej wartości  $\underline{I}_Z$ , odpowiadającej prądowi zwarcia dwójnika

i połączonego z nim równolegle dwójnika pasywnego o symbolicznej admitancji  $\underline{Y}_W$ , określonej stosunkiem symbolicznych wartości prądu zwarcia  $\underline{I}_Z$  i napięcia w stanie jałowym  $\underline{U}_O$  dwójnika

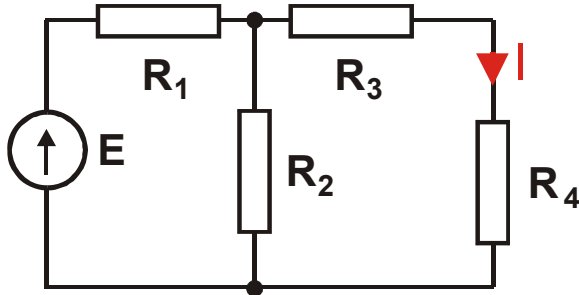
$$\underline{Y}_W = \frac{\underline{I}_Z}{\underline{U}_O} \quad (10.2)$$



<b>Tok postępowania przy wyznaczaniu</b>	
prądu $I_{AB}$	napięcia $U_{AB}$
metodą zastępczego <b>źródła napięcia</b>	metodą zastępczego <b>źródła prądu</b>
<b>jest następujący:</b>	
<b>1.</b>	w obwodzie o danym schemacie <b>odłączyć gałąź</b> w punktach A-B (gałąź w której występuje szukana wartość);
<b>2.</b>	dowolną metodą <b>obliczyć napięcie <math>U_o</math></b> między zaciskami A-B dwójnika w stanie jałowym;
<b>3.</b>	Obliczyć <b>Impedancję wewnętrzną</b> źródła zastępczego $Z_W$
<b>4.</b>	do wyznaczonego schematu zastępczego źródła napięcia należy <b>przyłączyć</b> uprzednio odłączoną <b>gałąź i obliczyć w niej prąd</b> wykorzystując prawo Ohma i II prawo Kirchhoffa.
<b>2.</b>	dowolną metodą <b>obliczyć prąd <math>I_z</math></b> w zwartych zaciskach A-B dwójnika;
<b>3.</b>	Obliczyć <b>admitancję wewnętrzną</b> źródła zastępczego $G_W$
<b>4.</b>	do wyznaczonego schematu zastępczego źródła prądu należy <b>przyłączyć</b> uprzednio odłączoną <b>gałąź i obliczyć na niej napięcie</b> wykorzystując prawo Ohma i I prawo Kirchhoffa.

**PRZYKŁAD 10.4 – dla obwodu prądu stałego**

Stosując metodę zastępczego źródła napięcia, obliczyć prąd płynący przez rezystancję  $R_4$ .



Dane:

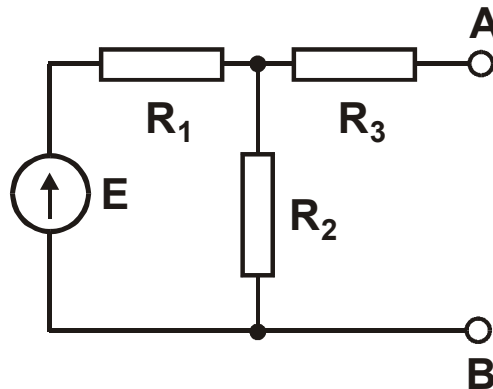
$$E = 20 \text{ V},$$

$$R_1 = 2 \Omega, \quad R_2 = 6 \Omega,$$

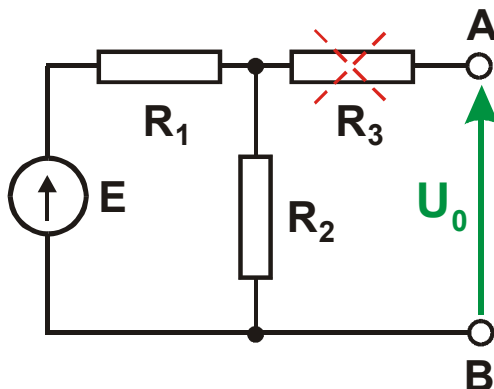
$$R_3 = 18,5 \Omega, \quad R_4 = 10 \Omega,$$

**ROZWIĄZANIE:**

1. w obwodzie o danym schemacie **odłączyć gałąź** w punktach A-B, w której występuje szukana wartość;



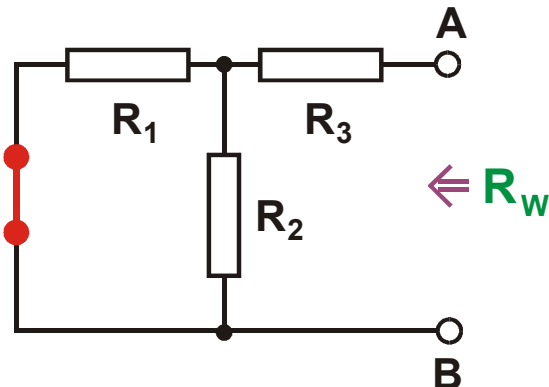
2. dowolną metodą **obliczyć napięcie  $U_0$**  między zaciskami A-B dwójnika w stanie jałowym;



Z zależności dzielnika napięcia:

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 15 \text{ [V]}$$

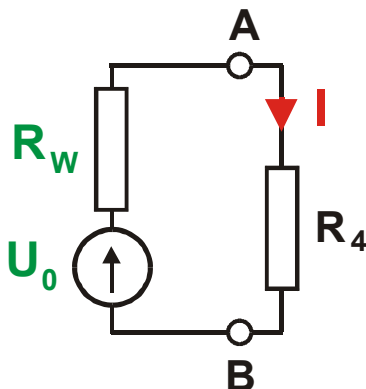
3. obliczyć rezystancję wewnętrzną źródła zastępczego  $R_W$  (źródła napięcia = zwarcia, źródła prądu = przerwy);



Bazując na metodzie transfiguracji:

$$R_W = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = 20 [\Omega]$$

4. do wyznaczonego schematu zastępczego źródła napięcia należy przyłączyć uprzednio odłączoną gałąź i obliczyć w niej prąd wykorzystując prawo Ohma i II prawo Kirchhoffa.



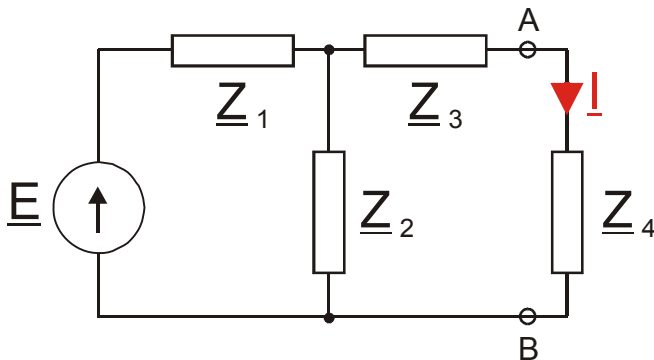
$$U_0 - IR_W - IR_4 = 0$$

czyli

$$I = \frac{U_0}{R_W + R_4} = 0,5 [\text{A}]$$

**PRZYKŁAD 10.5 – dla obwodu prądu sinusoidalnego**

Stosując metodę zastępczego źródła napięcia, obliczyć prąd płynący przez impedancję  $\underline{Z}_4$ .



DANE:

$$\underline{E} = 14 \text{ V},$$

$$\underline{Z}_1 = (250 + j174)\Omega, \underline{Z}_2 = -j82\Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = (250 + j174)\Omega, \underline{Z}_4 = 377\Omega,$$

**Ad.1.** Odłączamy gałąź w punktach A-B:

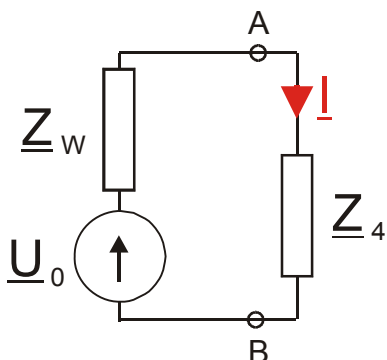
**Ad.2.** Obliczamy napięcie  $\underline{U}_0$  dwójnika w stanie jałowym;

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{E} \\ &= \frac{-j82}{(250 + j174) + (-j82)} 14 = -1,49 - j4,04 = 4,31 e^{-j110,2} \text{ [V]} \end{aligned}$$

**Ad.3.** Obliczamy impedancję wewnętrzną źródła zastępczego  $\underline{Z}_W$ ;

$$\begin{aligned} \underline{Z}_W &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_3 \\ &= \frac{(250 + j174)(-j82)}{(250 + j174) + (-j82)} + (250 + j174) = 273,69 + j83,28 \text{ [\Omega]} \end{aligned}$$

**Ad.4.** Przyłączamy uprzednio odłączoną gałąź do źródła zastępczego i obliczamy w niej prąd wykorzystując prawo Ohma i II prawo Kirchhoffa.



$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_W + \underline{Z}_4} \\ &= \frac{-1,49 - j4,04}{(273,69 + j83,28) + 377} \\ &= -0,00303 - j0,00583 = 0,00657 e^{-j117,5} \text{ [A]} \end{aligned}$$