12. CZWÓRNIKI – PARAMETRY ROBOCZE I FALOWE

12.1. PARAMETRY ROBOCZE

Jeżeli do jednych wrót czwórnika dołączono źródło wymuszeń, natomiast drugie wrota obciążono dwójnikiem bezźródłowym, to czwórnik taki pracuje w układzie przesyłowym i charakteryzują go **parametry robocze**.

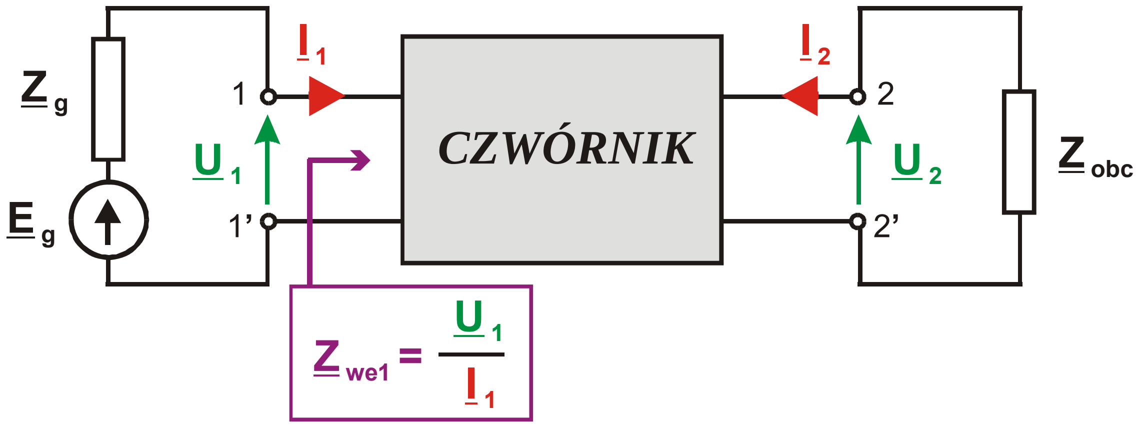
Przyjmujemy założenie, że źródło wymuszeń o napięciu źródłowym $\underline{E}_g$ i impedancji wewnętrznej $\underline{Z}_g$ dołączono do wrót pierwotnych, a wrota wtórne czwórnika obciążono dwójnikiem o impedancji $\underline{Z}_{obc}$

Do parametrów roboczych czwórnika klasy SLS – należy:

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

IMPEDANCJA WEJŚCIOWA PIERWOTNA

określana jest na zaciskach pierwotnych jako stosunek napięcia do prądu pierwotnego przy obciążeniu czwórnika po stronie wtórnej dwójnikiem o impedancji $\underline{Z}_{obc}$



Jeśli czwórnik opisuje się równaniami impedancyjnymi to z pierwszego równania (11.6):

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Z}_{we1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{z}_{11} + \underline{z}_{12}\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

Natomiast z drugiego równania po uwzględnieniu, że $\underline{U}_2 = -\underline{Z}_{obc}\underline{I}_2$

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\underline{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{\underline{z}_{21}}{\underline{Z}_{obc} + \underline{z}_{22}}$$

Stąd:

$$\boxed{\underline{Z}_{we1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{12}\,\underline{z}_{21}}{\underline{Z}_{obc} + \underline{z}_{22}}} \qquad (12.1)$$

W granicznym przypadku gdy strona wtórna jest:

- rozwarta ($\underline{Z}_{obc} = \infty$), impedancja ta staje się **impedancją wejściową pierwotną rozwarciową** $\underline{Z}_{1o}$ i wynosi

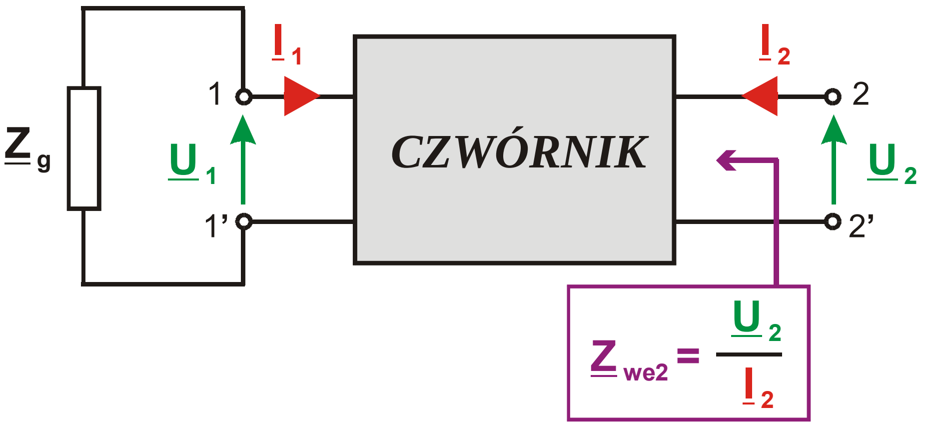
$$\boxed{\underline{Z}_{we1}\big|_{\underline{Z}_{obc}=\infty} = \underline{Z}_{1o} = \underline{z}_{11}} \qquad (12.2)$$

- zwarta ($\underline{Z}_{obc} = 0$), impedancja ta staje się **impedancją wejściową pierwotną zwarciową** $\underline{Z}_{1z}$ i wynosi

$$\boxed{\underline{Z}_{we1}\big|_{\underline{Z}_{obc}=0} = \underline{Z}_{1z} = \frac{\det \underline{\mathbf{Z}}}{\underline{z}_{22}}} \qquad (12.3)$$

IMPEDANCJA WEJŚCIOWA WTÓRNA

jest impedancją widzianą z zacisków wtórnych czwórnika (przy $\underline{E}_g = 0$) i wyraża się stosunkiem napięcia do prądu wtórnego



Z drugiego równania (11.6) otrzymujemy

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\underline{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_{we2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{z}_{22} + \underline{z}_{21}\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$$

Natomiast z drugiego równania po uwzględnieniu, że $\underline{U}_1 = -\underline{Z}_g\underline{I}_1$

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{\underline{z}_{12}}{\underline{Z}_g + \underline{z}_{11}}$$

Stąd:

$$\boxed{\underline{Z}_{we2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{z}_{22} - \frac{\underline{z}_{12}\,\underline{z}_{21}}{\underline{Z}_g + \underline{z}_{11}}} \qquad (12.4)$$

W granicznych przypadkach $\underline{Z}_{we2}$ staje się:

- **impedancją wejściową wtórną rozwarciową** $\underline{Z}_{2o}$

$$\boxed{\underline{Z}_{we2}\Big|_{\underline{Z}_g=\infty} = \underline{Z}_{2o} = \underline{z}_{22}} \qquad (12.5)$$

- **impedancją wejściową wtórną zwarciową** $\underline{Z}_{2z}$

$$\boxed{\underline{Z}_{we2}\Big|_{\underline{Z}_g=0} = \underline{Z}_{2z} = \frac{\det \underline{\mathbf{Z}}}{\underline{z}_{11}}} \qquad (12.6)$$

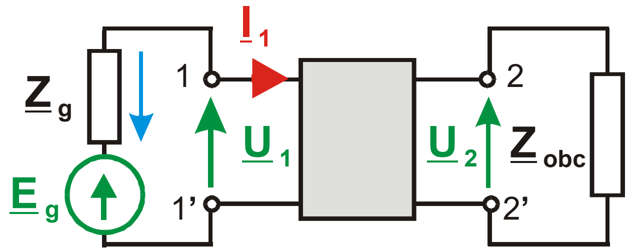
UWAGA:

Tak określone impedancje zwarciowe i rozwarciowe, pierwotne i wtórne związane są zależnością: $\underline{Z}_{1o}\underline{Z}_{2z} = \underline{Z}_{2o}\underline{Z}_{1z} = \det \underline{\mathbf{Z}}$

WZMOCNIENIE NAPIĘCIOWE (TRANSMITANCJA NAPIĘCIOWA)

$$\boxed{\underline{K}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{z}_{21}\,\underline{Z}_{obc}}{\det \underline{\mathbf{Z}} + \underline{z}_{11}\,\underline{Z}_{obc}}} \qquad (12.7)$$

Gdy uwzględni się fakt zasilania z rzeczywistego źródła energii, mówimy o
skutecznym (efektywnym)
wzmocnieniu napięciowym:

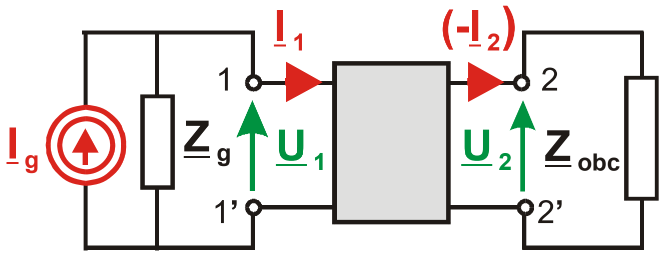


$$\boxed{\underline{K}_{u\,sk} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{E}_g} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1 + \underline{Z}_g \underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1 + \underline{Z}_g \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{wel}}} = \frac{\underline{K}_u}{1 + \dfrac{\underline{Z}_g}{\underline{Z}_{wel}}}} \qquad (12.8)$$

WZMOCNIENIE PRĄDOWE (TRANSMITANCJA PRĄDOWA)

$$\boxed{\underline{K}_i = \frac{(-\underline{I}_2)}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{z}_{21}}{\underline{z}_{22} + \underline{Z}_{obc}}} \qquad (12.9)$$

Gdy uwzględni się fakt zasilania z rzeczywistego źródła energii, mówimy o
skutecznym (efektywnym)
wzmocnieniu prądowym:



$$\boxed{\underline{K}_{i\,sk} = \frac{(-\underline{I}_2)}{\underline{I}_g} = \frac{(-\underline{I}_2)}{\dfrac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g}} = \frac{(-\underline{I}_2)}{\dfrac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_g \underline{I}_1}{\underline{Z}_g}} = \frac{(-\underline{I}_2)}{\dfrac{\underline{Z}_{wel}\underline{I}_1 + \underline{Z}_g \underline{I}_1}{\underline{Z}_g}} = \frac{\underline{K}_i}{1 + \dfrac{\underline{Z}_{wel}}{\underline{Z}_g}}} \qquad (12.10)$$

UWAGA: *Wszystkie określone powyżej transmitancje (wzmocnienia) mogą być również wyrażone w mierze logarytmicznej:*

$$K_N = \ln K \quad [N]$$

$$K_{dB} = 20 \lg K \quad [dB]$$

12.1. PARAMETRY FALOWE CZWÓRNIKA

Parametry falowe czwórnika określane są dla szczególnych warunków pracy czwórnika a mianowicie przy tzw. **dopasowaniu falowym**.

IMPEDANCJE FALOWE

Rozważmy czwórnik pracujący w układzie przesyłowym i załóżmy, że jest on opisany parametrami łańcuchowymi – wówczas:

$$\boxed{\underline{Z}_{we1}=\frac{\underline{Z}_{obc}\underline{a}_{11}+\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_{obc}\underline{a}_{21}+\underline{a}_{22}}} \tag{12.11}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{we2}=\frac{\underline{Z}_{g}\underline{a}_{22}+\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_{g}\underline{a}_{21}+\underline{a}_{11}}} \tag{12.12}$$

Żądając aby

$$\boxed{\underline{Z}_g=\underline{Z}_{we1} \quad oraz \quad \underline{Z}_{obc}=\underline{Z}_{we2}} \tag{12.13}$$

otrzymuje się

$$\begin{cases} \underline{Z}_g=\dfrac{\underline{Z}_{obc}\,\underline{a}_{11}+\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_{obc}\,\underline{a}_{21}+\underline{a}_{22}} \\[2ex] \underline{Z}_{obc}=\dfrac{\underline{Z}_{g}\,\underline{a}_{22}+\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_{g}\,\underline{a}_{21}+\underline{a}_{11}} \end{cases} \tag{12.14}$$

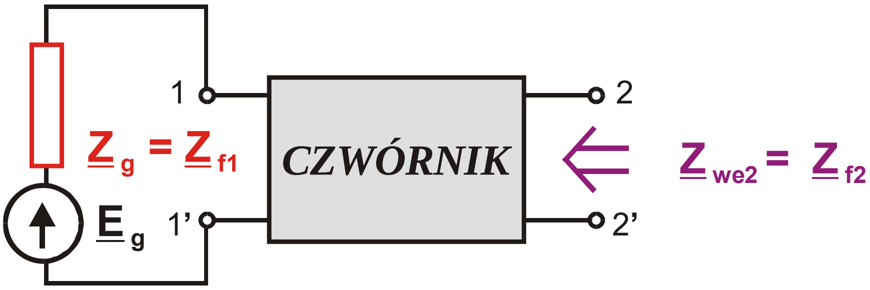
Impedancje $\underline{Z}_g$ i $\underline{Z}_{obc}$, będące rozwiązaniami układu równań (12.14) nazywają się impedancjami falowymi (charakterystycznymi) czwórnika i wyrażają się wzorami:

impedancja falowa pierwotna
$$\boxed{\underline{Z}_{f1} = \sqrt{\frac{\underline{a}_{11}\,\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\,\underline{a}_{22}}}} \qquad (12.15)$$

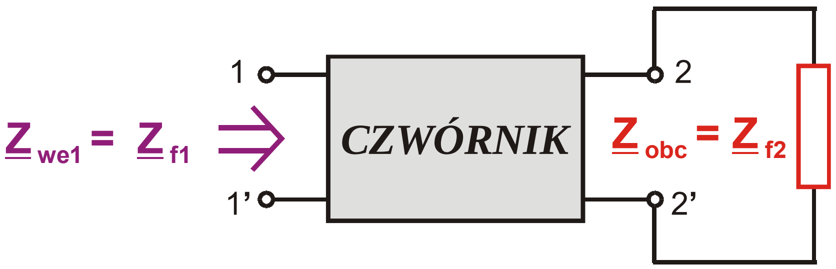
impedancja falowa wtórna
$$\boxed{\underline{Z}_{f2} = \sqrt{\frac{\underline{a}_{22}\,\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\,\underline{a}_{11}}}} \qquad (12.16)$$

Jest to zatem para impedancji o takiej właściwości, że

- Jeśli $\underline{Z}_g=\underline{Z}_{f1}$, to mówimy że **czwórnik jest dopasowany falowo na wejściu** *(wówczas impedancja wejściowa wtórna jest równa jego impedancji falowej wtórnej).*



- Jeżeli natomiast $\underline{Z}_{obc}=\underline{Z}_{f2}$, to mówimy, że **czwórnik jest dopasowany falowo na wyjściu** *(wówczas impedancja wejściowa pierwotna jest równa jego impedancji falowej pierwotnej)*



- Jeśli czwórnik jest dopasowany na wejściu i na wyjściu to mówimy, że jest **obustronnie dopasowany falowo** (w **stanie dopasowania falowego**),

UWAGA: *Impedancje falowe są parametrami własnymi czwórnika, tzn. zależą tylko od właściwości samego czwórnika!*

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

Impedancje falowe można uzależnić od impedancji wejściowych stanu jałowego i stanu zwarcia.

Ponieważ **impedancja wejściowa pierwotna:**

- **rozwarciowa** $\underline{Z}_{1o} = \dfrac{\underline{a}_{11}}{\underline{a}_{21}}$ (12.17)
- **zwarciowa** $\underline{Z}_{1z} = \dfrac{\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{22}}$ (12.18)

natomiast **impedancja wejściowa wtórna:**

- **rozwarciowa** $\underline{Z}_{2o} = \dfrac{\underline{a}_{22}}{\underline{a}_{21}}$ (12.19)
- **zwarciowa** $\underline{Z}_{2z} = \dfrac{\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{11}}$ (12.20)

Zatem: **impedancja falowa pierwotna**

$$\boxed{\underline{Z}_{f1} = \sqrt{\underline{Z}_{1o}\,\underline{Z}_{1z}}} \tag{12.21}$$

impedancja falowa wtórna

$$\boxed{\underline{Z}_{f2} = \sqrt{\underline{Z}_{2o}\,\underline{Z}_{2z}}} \tag{12.22}$$

IMPEDANCJĘ FALOWĄ ŚREDNIĄ CZWÓRNIKA określamy jako średnią geometryczną impedancji falowej pierwotnej i wtórnej

$$\boxed{\underline{Z}_f = \sqrt{\underline{Z}_{f1}\,\underline{Z}_{f2}} = \sqrt{\frac{\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}}}} \tag{12.23}$$

Jeśli czwórnik jest symetryczny ($\underline{a}_{11}=\underline{a}_{22}$) to posiada tylko jedną impedancję falową

$$\boxed{\underline{Z}_f = \underline{Z}_{f1} = \underline{Z}_{f2} = \sqrt{\underline{Z}_o\,\underline{Z}_z}} \tag{12.24}$$

Dla czwórnika niesymetrycznego możemy również posługiwać się pojęciem **przekładni impedancyjnej** czwórnika określonej następująco:

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{f2}}{\underline{Z}_{f1}}}} \tag{12.25}$$

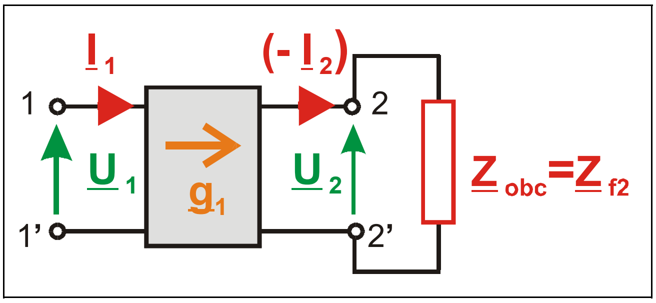
Można wykazać, że

$$\boxed{\underline{Z}_{f1} = \frac{\underline{Z}_f}{p}\ , \quad \underline{Z}_{f2} = p\,\underline{Z}_f} \tag{12.26}$$

TAMOWNOŚĆ FALOWA (współczynnik przenoszenia falowego)

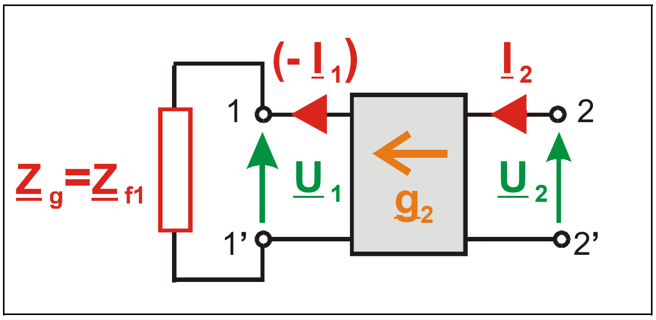
Drugim istotnym parametrem falowym czwórnika jest tamowność falowa „*g*". Określa się ją dla czwórnika **DOPASOWANEGO FALOWO NA**

- **WYJŚCIU** jako **tamowność falową pierwotną**



$$\underline{g}_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1}{\underline{U}_2(-\underline{I}_2)}\Bigg|_{\underline{Z}_{obc}=\underline{Z}_{f2}} \tag{12.27}$$

- **WEJŚCIU** jako **tamowność falową wtórną**



$$\underline{g}_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_2\underline{I}_2}{\underline{U}_1(-\underline{I}_1)}\Bigg|_{\underline{Z}_g=\underline{Z}_{f1}} \tag{12.28}$$

Definiuje się także **tamowność falową średnią**

$$\underline{g} = \frac{\underline{g}_1 + \underline{g}_2}{2} \tag{12.29}$$

Współczynniki g_1 i g_2 można wyrazić za pomocą macierzy łańcuchowej czwórnika:

$$\underline{g}_1 = \ln\left(\sqrt{\underline{a}_{11}\,\underline{a}_{22}} + \sqrt{\underline{a}_{12}\,\underline{a}_{21}}\right) \tag{12.30}$$

$$\underline{g}_2 = \ln\left(\frac{\sqrt{\underline{a}_{11}\,\underline{a}_{22}} + \sqrt{\underline{a}_{12}\,\underline{a}_{21}}}{\det \underline{\mathbf{A}}}\right) \tag{12.31}$$

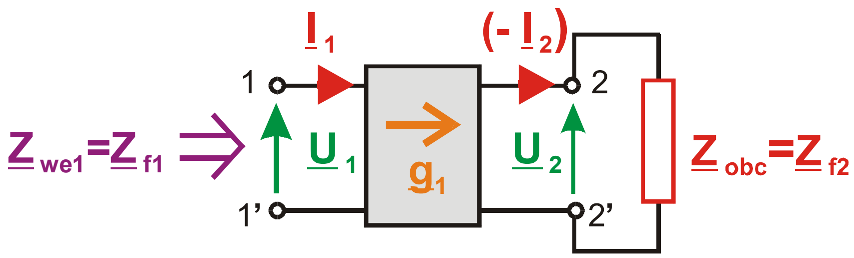
Z równań (11.63 i 64) wynika, że dla **czwórników odwracalnych** (det$\underline{\mathbf{A}}$=1) oba współczynniki przenoszenia są sobie równe

$$\boxed{\underline{g} = \underline{g}_1 = \underline{g}_2 = \ln\left(\sqrt{\underline{a}_{11}\,\underline{a}_{22}} + \sqrt{\underline{a}_{12}\,\underline{a}_{21}}\right)} \tag{12.32}$$

Warunki transmisji sygnałów przez czwórnik odwracalny są dla obu kierunków transmisji identyczne.
Przepływ energii odbywa się w sposób symetryczny.

===

Gdy czwórnik dopasowany jest falowo na wyjściu:



$$\frac{\underline{U}_2}{\left(-\underline{I}_2\right)} = \underline{Z}_{f2} \quad \Rightarrow \quad \left(-\underline{I}_2\right) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{f2}}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{f1} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{f1}}$$

$$\boxed{\underline{g}_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1}{\underline{U}_2\left(-\underline{I}_2\right)} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{f1}}}{\underline{U}_2\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{f2}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1^{\,2}\underline{Z}_{f2}}{\underline{U}_2^{\,2}\underline{Z}_{f1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{I}_1^{\,2}\underline{Z}_{f1}}{\left(-\underline{I}_2\right)^2\underline{Z}_{f2}}}$$

===

W przypadku czwórnika symetrycznego [pamiętając o (12.24)]

$$\boxed{\underline{g} = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln\frac{\underline{I}_1}{\left(-\underline{I}_2\right)}} \tag{12.33}$$

$$\boxed{\underline{g} = \ln\left(\underline{a}_{11} + \sqrt{\underline{a}_{12}\,\underline{a}_{21}}\right) = \ln\left(\underline{a}_{11} + \sqrt{\underline{a}_{11}^{2} - 1}\right)} \tag{12.34}$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

Ogólnie współczynnik przenoszenia falowego jest liczbą zespoloną o postaci

$$\underline{g} = a + j\,b$$

współczynnik **tłumienia** falowego (tłumienność) → a	współczynnik **przesunięcia** falowego (przesuwność) → b

==

Zespolone wartości skuteczne napięć zaciskowych:

$$\underline{U}_1 = U_1\, e^{j\Psi_1}\ ,\ \underline{U}_2 = U_2\, e^{j\Psi_2}$$

==

Zgodnie z (12.33)

$$\boxed{\underline{g} = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln\frac{U_1\, e^{j\Psi_1}}{U_2\, e^{j\Psi_2}}} = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) + \ln\left(\frac{e^{j\Psi_1}}{e^{j\Psi_2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) + \ln\left(e^{j(\Psi_1-\Psi_2)}\right)$$

$$= \boxed{\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)} + j\,\boxed{(\Psi_1-\Psi_2)}$$

$$= \boxed{a\,[\mathrm{Np}]} + j\,\boxed{b\,[\mathrm{rad}]}$$

Przekształcając (12.33)

$$\boxed{e^{\underline{g}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}}$$

$$e^{\underline{g}} = e^{(a+jb)} = \boxed{e^{\,a}}\, e^{j\ b}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1\, e^{j\Psi_1}}{U_2\, e^{j\Psi_2}} = \boxed{\frac{U_1}{U_2}}\ e^{j\ \overbrace{(\Psi_1-\Psi_2)}^{b}}$$

PRZYKŁAD: Dla czwórnika w stanie dopasowania falowego o znanej macierzy łańcuchowej $\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} (4+j2) & (-20+j20) \\ 0{,}2 & (4+j2) \end{bmatrix}$

i znanym napięciu wej. $u_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(628\,t + 60^o)$

wyznaczyć:
a) rozwarciową i zwarciową impedancję wejściową wtórną;
b) parametry dwójnika obciążenia;
c) napięcie wyjściowe.

Ad. a) rozwarciowa impedancja wejściowa wtórna (12.19)

$$\underline{Z}_{2o} = \frac{\underline{a}_{22}}{\underline{a}_{21}} = \frac{4+j2}{0{,}2} = 20 + j10$$

zwarciowa impedancja wejściowa wtórna (12.20)

$$\underline{Z}_{2z} = \frac{\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{11}} = \frac{-20+j20}{4+j2} = -2 + j6$$

Ad. b) Z macierzy $\underline{\mathbf{A}}$ wynika, że czwórnik jest symetryczny, czyli (12.24)

$$\underline{Z}_f = \sqrt{\underline{Z}_o\,\underline{Z}_z} = \underline{Z}_{obc} = \underset{\uparrow \atop R}{4{,}55} + j\,\underbrace{10{,}99}_{X_L}$$

Zatem:

Znając pulsację i reaktancję indukcyjną, $L = \dfrac{X_L}{\omega} = 17$ [mH]

Ad. c) Tamowność falowa (12.34)

$$\underline{g} = \ln\left(\underline{a}_{11} + \sqrt{\underline{a}_{11}^2 - 1}\right) = \ln\left(8{,}88\,e^{j\,27{,}15^o}\right) = \ln\left(8{,}88\,e^{j\,0{,}474\,rad}\right)$$

$$\underline{g} = \ln(8{,}88) + \ln\left(e^{j\,0{,}474\,rad}\right) = 2{,}18 + j0{,}474$$

Czyli:

$$U_2 = \frac{U_1}{e^a} = \frac{10}{e^{2{,}18}} = \frac{10}{8{,}88} = 1{,}126 \text{ [v]}, \quad \Psi_2 = \Psi_1 - b\left[^o\right] = 60^o - 27{,}15^o = 32{,}85^o$$

$$u_2(t) = 1{,}126\sqrt{2}\sin(628\,t + 32{,}85^o)$$