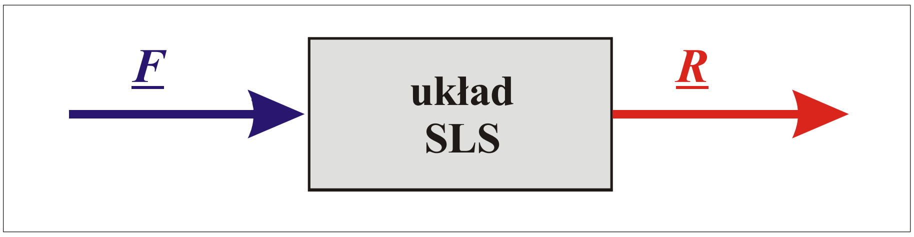
13. ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA UKŁADÓW SLS

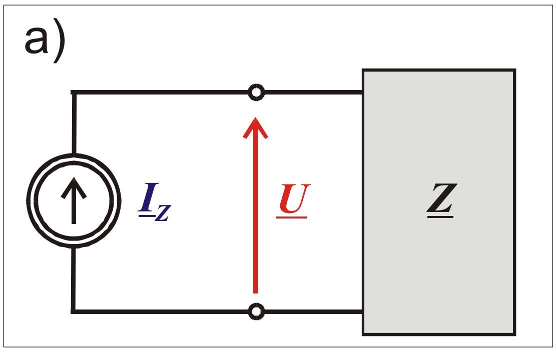
13.1. POJĘCIE IMMITANCJI I TRANSMITANCJI

Rozpatrzmy układ elektryczny, na który działa wymuszenie harmoniczne o symbolicznej wartości skutecznej $\underline{F}$ (napięciowe lub prądowe) i dla którego poszukiwaną funkcją jest odpowiedź o symbolicznej wartości skutecznej $\underline{R}$ (prądowa lub napięciowa).

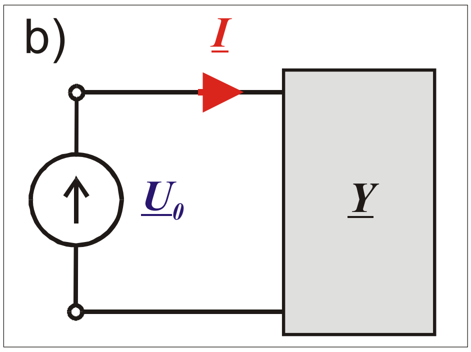


Jeśli wielkości $\underline{F}$ i $\underline{R}$ występują na tych samych zaciskach to rozpatrywany układ staje się **dwójnikiem**. Jego stan opisany jest parą funkcji: prądu i napięcia wejściowego

W zależności od wymuszenia odpowiedź wyznaczamy ze wzoru:



$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}_Z \qquad (13.1a)$$



$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}_0 \qquad (13.1b)$$

Lub definiujemy jako:

IMpedancja $$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_Z} \qquad (13.2a)$$

ad**MITANCJA** $$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_0} \qquad (13.2b)$$

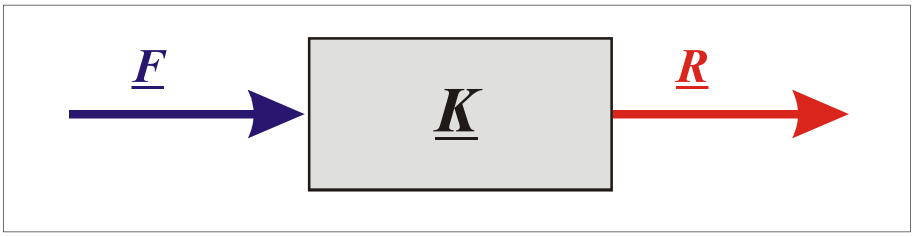
Dla obu tych wielkości spełniających związek

$$\underline{Y}\,\underline{Z} = 1 \qquad (13.3)$$

stosujemy określenie : **IMMITANCJA**

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

W przypadku wyodrębnienia dwóch par zacisków mamy do czynienia z **czwórnikiem**. Jeśli wymuszenie jest związane z jedną bramą a odpowiedź z drugą to relacje pomiędzy nimi - **stosunek odpowiedzi do wymuszenia nazywamy TRANSMITANCJĄ**.

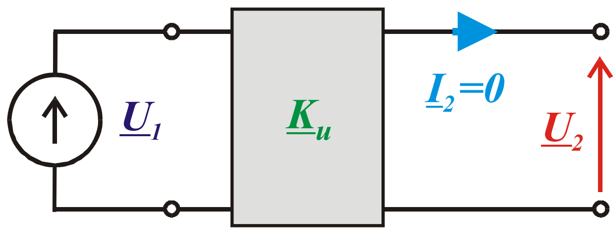


$$\boxed{\underline{K} = \frac{\underline{R}}{\underline{F}}} \qquad \textbf{(13.4)}$$

czyli

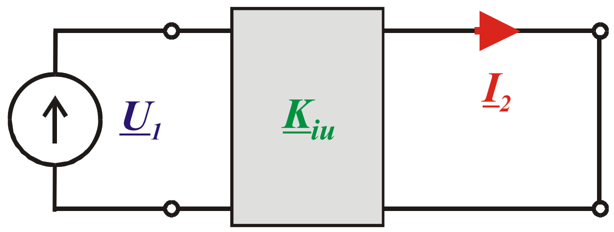
$$\boxed{\underline{R} = \underline{K}\,\underline{F}} \qquad \textbf{(13.5)}$$

Ponieważ w przypadku czwórnika wymuszeniem i odpowiedzią może być prąd lub napięcie, należy więc rozróżnić **cztery transmitancje:**



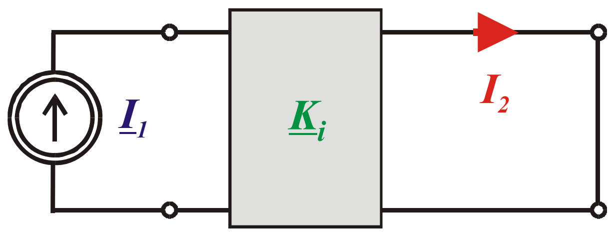
transmitancję napięciową

$$\underline{K}_u = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad (13.6a)$$



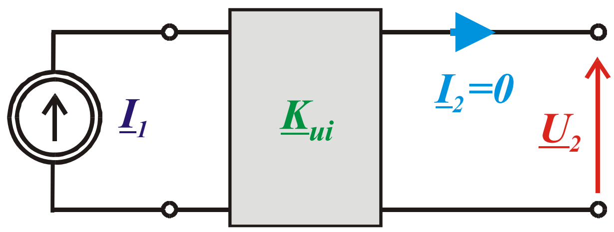
transmitancję prądowo-napięciową

$$\underline{K}_{iu} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} \qquad (13.6b)$$



transmitancję prądową

$$\underline{K}_i = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} \qquad (13.6c)$$



transmitancję napięciowo-prądową

$$\underline{K}_{ui} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad (13.6d)$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

13.2. CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

Immitancje i transmitancje są wielkościami zespolonymi, zależnymi od układu (jego struktury i wartości elementów) oraz od pulsacji (częstotliwości) sygnału wymuszającego.

Dla układu liniowego, będącego w stanie ustalonym, badanego przy przebiegach harmonicznych dla określonej pulsacji słuszna jest zależność:

$$\underline{K} = \frac{\underline{R}_m}{\underline{F}_m} = \frac{\sqrt{2}\,R\,e^{j\psi_R}}{\sqrt{2}\,F\,e^{j\psi_F}} = \boxed{\frac{R}{F}}\; e^{j\underbrace{(\psi_R-\psi_F)}} = K\,e^{j\Theta} \qquad (13.7)$$

moduł transmitancji *K*
określony jest stosunkiem wartości skutecznych odpowiedzi do wymuszenia

argument transmitancji *Θ*
wyraża kąt przesunięcia fazowego odpowiedzi w odniesieniu do wymuszenia

Charakterystykami częstotliwościowymi układu SLS nazywamy zależność transmitancji lub immitancji układu od częstotliwości lub pulsacji sygnału harmonicznego.

$$\boxed{\underline{K}(\omega) = K(\omega)\,e^{j\Theta(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)} \qquad \omega \in (0 \div \infty) \qquad (13.8)$$

gdzie: $\underline{K}(\omega)$ - częstotliwościowa **charakterystyka amplitudowo-fazowa**

$K(\omega)$ - częstotliwościowa **charakterystyka amplitudowa**

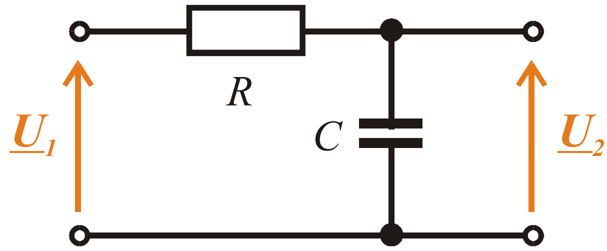
$\Theta(\omega)$ - częstotliwościowa **charakterystyka fazowa**

$P(\omega)$ - częstotliwościowa charakterystyka części rzeczywistej transmitancji

$Q(\omega)$ - częstotliwościowa charakterystyka części urojonej transmitancji

WYKRESY WYBRANYCH CHARAKTERYSTYK

na przykładzie układu RC (FD)



Zakładamy, że wymuszeniem jest napięcie $u_1(t) = U_{m1} \sin \omega t$.

Stosując się metodę symboliczną - wyznaczamy $\underline{U}_2$

$$\underline{U}_2 = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_1$$

Zatem transmitancja napięciowa dla rozpatrywanego układu wyniesie:

$$\underline{K}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_1}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Czyli:

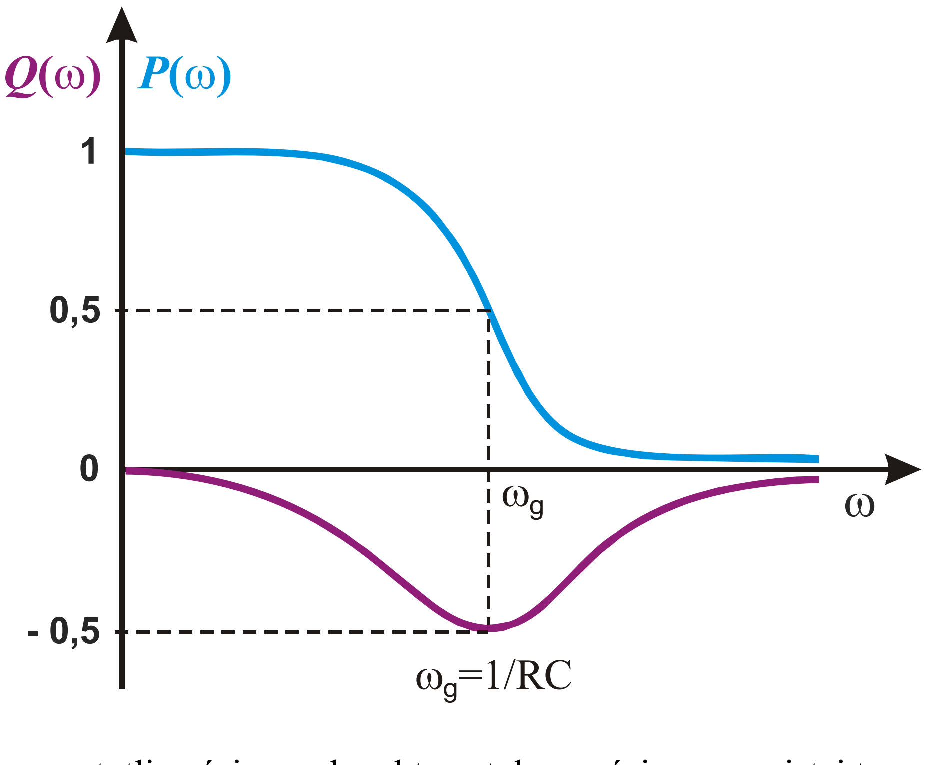
$$\boxed{\underline{K}_u(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}} \tag{13.9}$$

$$\underline{K}_u(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Zatem: $$P(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad , \quad Q(\omega) = -\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \qquad (13.10)$$

$$\boxed{\underline{K}_u(\omega)} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\boxed{\frac{-\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}_{Q(\omega)}$$



$P(\omega)$ - częstotliwościowa charakterystyka części rzeczywistej transmitancji

$Q(\omega)$ - częstotliwościowa charakterystyka części urojonej transmitancji

$$\boxed{\underline{K}_u(\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}} = \boxed{\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}} + j\boxed{\frac{-\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Czyli:

$$K(\omega)=\sqrt{P(\omega)^2+Q(\omega)^2}=\sqrt{\frac{1}{(1+\omega^2R^2C^2)^2}+\frac{\omega^2R^2C^2}{(1+\omega^2R^2C^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}}$$

zależność modułu transmitancji od pulsacji opisuje równanie:

$$\boxed{K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}} \qquad (13.11)$$

Natomiast

$$\Theta(\omega)=arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=arctg\left[\frac{-\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}\cdot\frac{1+\omega^2R^2C^2}{1}\right]$$

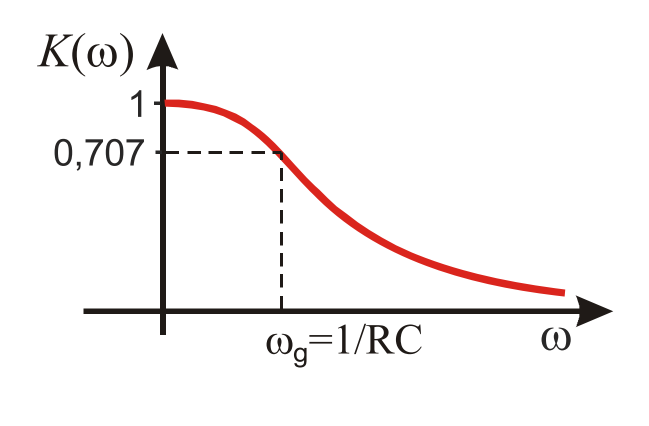
zależność argumentu transmitancji od pulsacji opisuje równanie:

$$\boxed{\Theta(\omega)=-arctg\left(\omega RC\right)} \qquad (13.12)$$

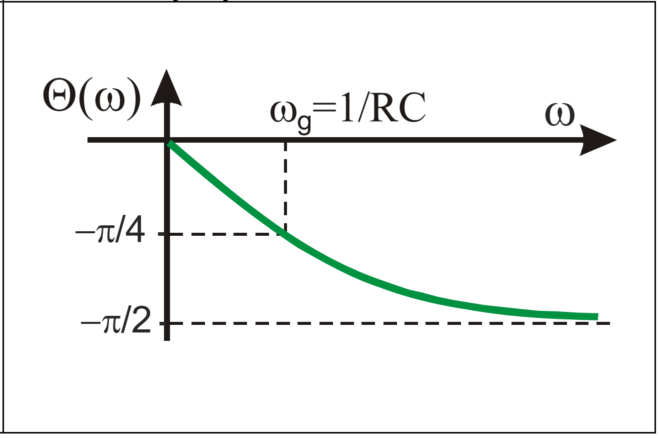
$$\boxed{\underline{K}_u(\omega)} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}}}_{K(\omega)} e^{\,j \overbrace{\boxed{[-arctg(\omega RC)]}}^{}}$$

$K(\omega)$ $\qquad$ $\Theta(\omega)$

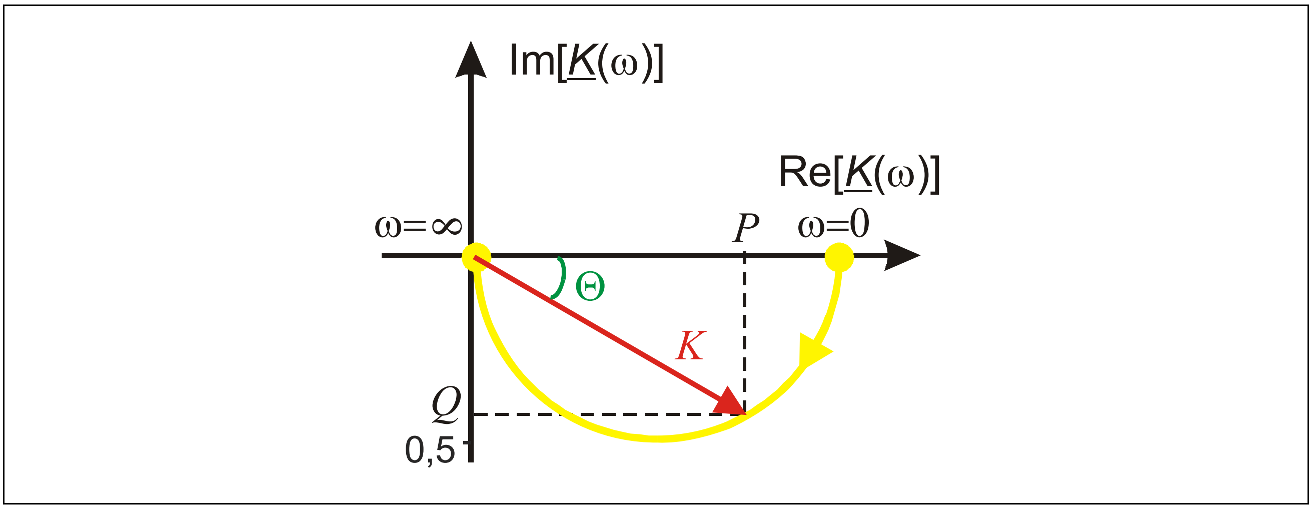
***K*(*ω*)** - częstotliwościowa charakterystyka **amplitudowa**



***Θ*(*ω*)** - częstotliwościowa charakterystyka **fazowa**



***K*(*ω*)** - częstotliwościowa charakterystyka **amplitudowa-fazowa**



WSPÓŁRZĘDNE WZGLĘDNE I LOGARYTMICZNE CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH

Charakterystyki częstotliwościowe podaje się na ogół, z uwagi na ich: czytelność, wygodę posługiwania się lub uwypuklenie pewnych cech - we współrzędnych względnych i/lub we współrzędnych logarytmicznych.

Charakterystyki o współrzędnych logarytmicznych nazywamy charakterystykami logarytmicznymi.

Jako współrzędne względne dla modułu transmitancji (immitancji) przyjmuje się na ogół stosunek wartości wymienionych wielkości do pewnej wartości charakterystycznej, np. maksymalnej. Mówimy wówczas o charakterystyce względnej:

$$K(\omega) = \frac{K(\omega)}{K_{\max}} \quad \text{lub} \quad K(\omega) = \frac{K(\omega)}{K(\omega_0)} \tag{13.13}$$

Jako współrzędne względne (unormowane) dla pulsacji ω (lub częstotliwości f) przyjmuje się:

- pulsację względną ω/ω_0
- odstrojenie bezwzględne $\Delta\omega=\omega-\omega_0$
- odstrojenie względne $\xi=(\omega-\omega_0)/\omega_0$

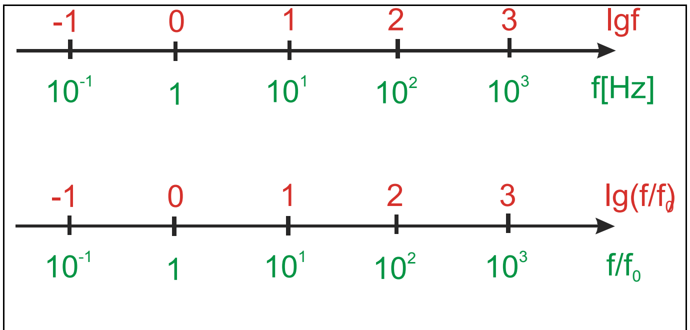
gdzie: ω_0 *– jest charakterystyczną pulsacją dla układu.*

Jako współrzędne logarytmiczne pulsacji (częstotliwości) przyjmuje się najczęściej logarytm dziesiętny pulsacji lub pulsacji względnej:

$$x_d = \lg\omega \tag{13.14}$$

$$x_d = \lg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{13.15}$$

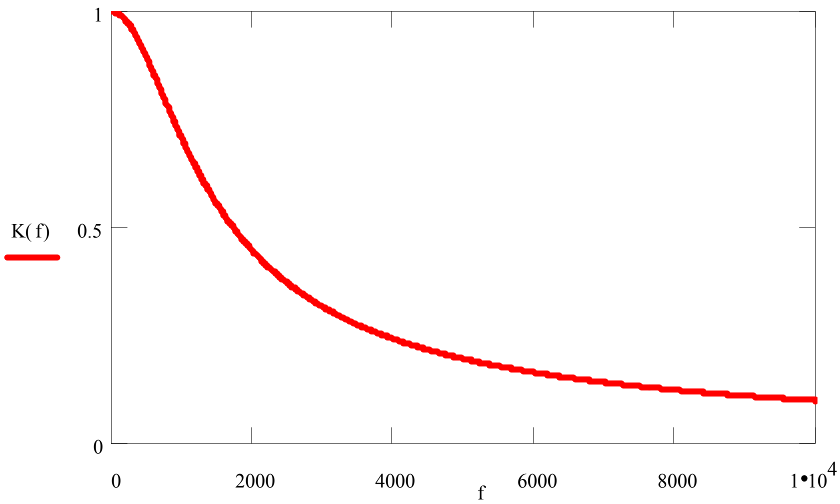
mówimy wówczas o dekadowej skali częstotliwości, której charakterystyczną cechą jest stała długość odcinka odpowiadającego zmianie o jedną dekadę częstotliwości.



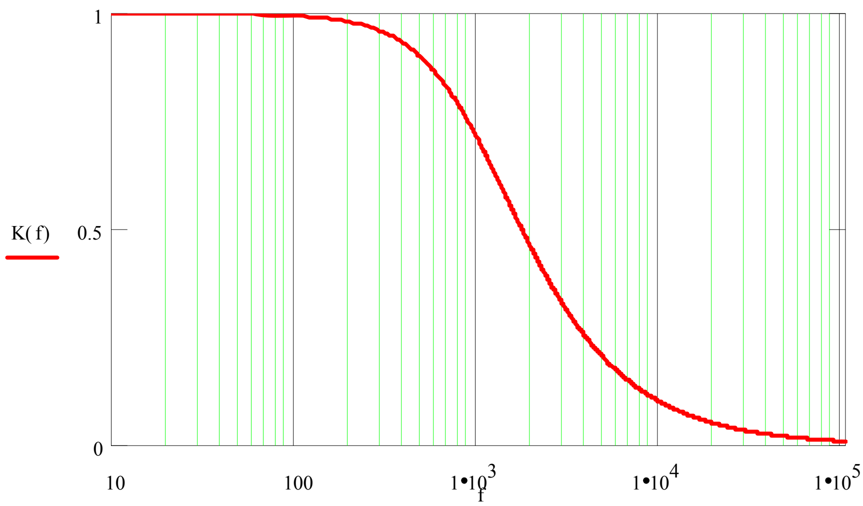
Skale dekadowe

Przykład:

W skali liniowej



W skali logarytmicznej



dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

Jako współrzędne logarytmiczne dla modułu transmitancji (immitancji) przyjmuje się moduł transmitancji wyrażony w decybelach zgodnie ze wzorem

$$K_{dB}(\omega) = 20\lg K(\omega) \tag{13.16a}$$

lub

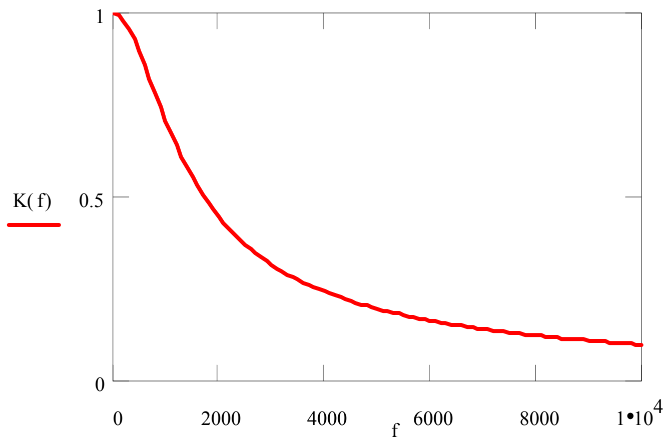
$$K_{dB}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20\lg K\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{13.16b}$$

Wybrane wartości wzmocnienia wyrażone w decybelach

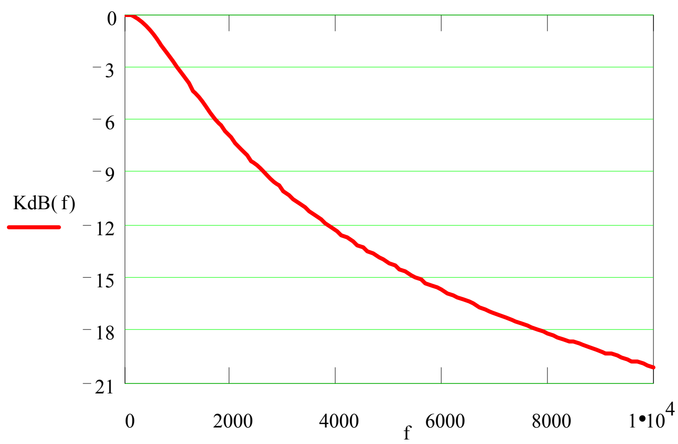
$K(\omega)$	10^{-N}	0,1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	10	10^{N}
$20\lg K(\omega)$ [dB]	$-20\,N$	-20	-3	0	3	20	$20\,N$

Przykład:

W skali liniowej



W skali decybelowej



dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

CHARAKTERYSTYK ASYMPTOTYCZNE

W wielu zagadnieniach praktycznych wygodnie jest posługiwać się przybliżoną postacią ch-styk częstotliwościowych układu. Istota tego przybliżenia polega na zastąpieniu dokładnego wykresu ch-styki częstotliwościowej jej przebiegiem przybliżonym w postaci odpowiednio dobranej linii łamanej.

Przybliżone charakterystyki o postaci linii łamanych są nazywane ***charakterystykami asymptotycznymi*** lub ***charakterystykami Bodego***.

Załóżmy, że rozpatrujemy układ o charakterystyce amplitudowo-fazowej postaci:

$$\underline{K}(\omega) = \frac{\underline{L}(\omega)}{\underline{M}(\omega)} = \frac{L_1 e^{j\Psi_{L1}} L_2 e^{j\Psi_{L2}} \ldots}{M_1 e^{j\Psi_{M1}} M_2 e^{j\Psi_{M2}} \ldots} \tag{13.17}$$

gdzie czynniki $\underline{L}_i(\omega)$ oraz $\underline{M}_i(\omega)$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych stopnia pierwszego lub drugiego.

Pamiętając, że: $\underline{K}(\omega) = K(\omega)\, e^{j\Theta(\omega)}$

możemy zapisać:

$$K(\omega) = \frac{L_1 L_2 \ldots}{M_1 M_2 \ldots} \tag{13.18}$$

lub

$$\lg K(\omega) = \sum_i \lg(L_i) - \sum_i \lg(M_i) \tag{13.19}$$

Zatem logarytmiczna charakterystyka amplitudowa (wyrażona w mierze decybelowej) opisana jest wyrażeniem:

$$\boxed{K_{dB}(\omega) = 20\lg K(\omega) = 20\left[\sum_i \lg(L_i) - \sum_i \lg(M_i)\right]} \tag{13.20}$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

na przykładzie układu RC (FD)

$$\underline{K}(\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

Zal. (13.17)

$$\underline{K}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)=\frac{\underline{L}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)}{\underline{M}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)}=\frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)} \qquad \text{gdzie } \omega_g=\frac{1}{RC}$$

Zal. (13.18)

$$K\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$

Zal. (13.20)

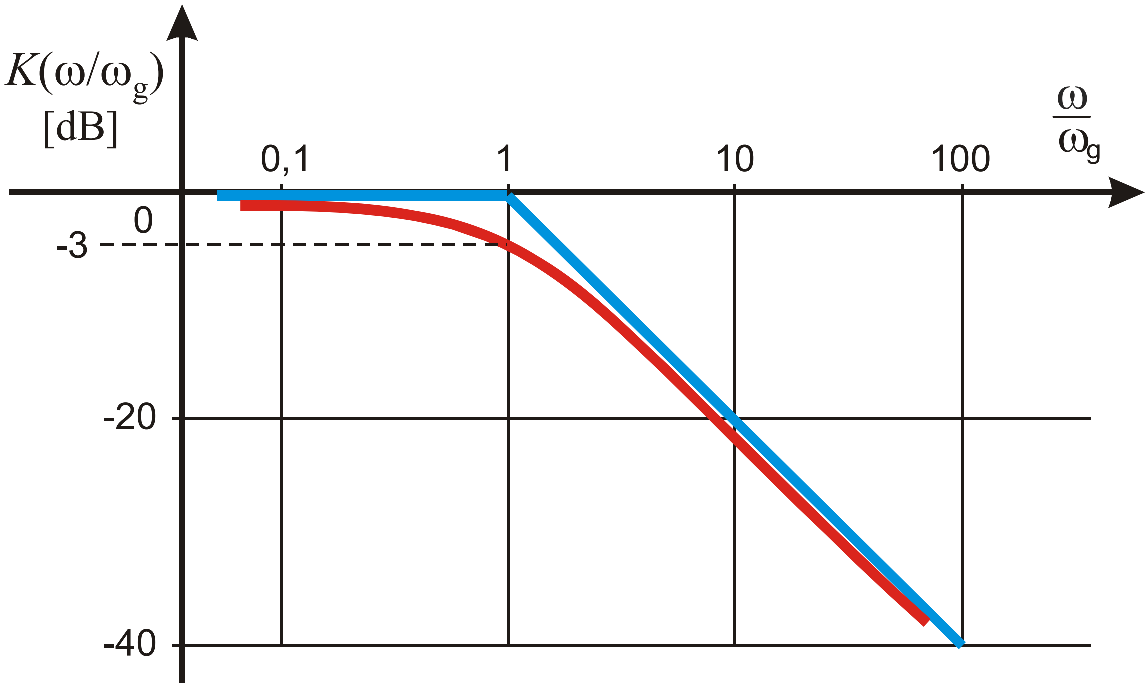
$$K_{dB}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)=20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}=-20\lg\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \qquad (13.21)$$

Uwzględniając przy tym następujące, oczywiste przybliżenia:

$$\frac{\omega}{\omega_g}<<1, \qquad \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}\cong 1, \qquad K_{dB}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)\cong 0 \qquad (13.22a)$$

$$\frac{\omega}{\omega_g}>>1, \qquad \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}\cong \frac{\omega}{\omega_g}, \qquad K_{dB}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)\cong -20\lg\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) \qquad (13.22b)$$

Dla $\omega/\omega_g<<1$ oraz dla $\omega/\omega_g>>1$ rzeczywistą ch-stykę amplitudową można dobrze aproksymować, zastępując ją półprostymi określonymi wzorami (13.22a) i (13.22b). Doprowadzając te półproste do punktu ich przecięcia $\omega/\omega_g=1$ otrzymamy ch-stykę aproksymującą tj. charakterystykę asymptotyczną odpowiadającą wyrażeniu (13.21).



PARAMETRY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE UKŁADÓW

Dla charakterystyk częstotliwościowych układu przyjmuje się na ogół takie parametry jak:

- **częstotliwość graniczna** - częstotliwość przy której moduł transmitancji maleje o 3 dB od wartości nominalnej dla której umownie przyjęto poziom 0dB.

- **pasmo przenoszenia** - zakres częstotliwości, w którym moduł transmitancji maleje nie więcej niż o 3 dB od wartości nominalnej - jest to zakres częstotliwości zawarty między częstotliwościami granicznymi. Miarą pasma przenoszenia S_P jest

$$S_P = f_g - f_d$$

- **selektywność układu** - zdolność rozdziału częstotliwościowego przenoszonych sygnałów. Miarą selektywności jest **współczynnik prostokątności**

$$p = \frac{S_P(3dB)}{S_P(20dB)}$$

- **nachylenie charakterystyki** - określa się liczbą decybeli wyrażającą zmianę modułu transmitancji układu na dekadę w zadanym zakresie częstotliwości

$$N_{dB/dek} = \frac{K_{dB}(\omega_1) - K_{dB}(\omega_2)}{\lg \frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

KLASYFIKACJA UKŁADÓW

Ze względu na zdefiniowane pasma przepuszczania (zaporowe), można przedstawić następującą klasyfikację układów:

- wąskopasmowy $S_P << f_s$
- szerokopasmowy $S_P = f_s$ lub $S_P > f_s$
- dolnoprzepustowy $f_{g1}=0$ $f_{g2} < \infty$
- górnoprzepustowy $f_{g1}>0$ $f_{g2} = \infty$
- środkowoprzepustowy $f_{g1}>0$ $f_{g2} < \infty$
- środkowozaporowy $f \notin (f_{g1}, f_{g2}) \wedge f_{g1}>0 \wedge f_{g2} < \infty$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl