

14. OBWODY LINIOWE POBUDZONE SYGNAŁEM ODKSZTAŁCONYM

PRZYPOMNIENIE

- A) Funkcja wykładnicza pełni wyjątkową rolę, ponieważ:
- każdy sygnał występujący w praktyce może być zawsze wyrażony w postaci sumy funkcji wykładniczych;
 - w przypadku obwodów liniowych odpowiedź obwodu na wymuszenie wykładnicze jest także wykładnicza.
- B) Metoda symboliczna zapisu przebiegów sinusoidalnych pozwala traktować je jako przebiegi wykładnicze

14.1. OPIS SYGNAŁU ODKSZTAŁCONEGO

A) TRYGONOMETRYCZNY SZEREG FOURIERA

Dowolną funkcję okresową $x(t)$ o okresie T , spełniającą warunki Dirichleta – wyrażone następująco:

- przedział o długości T można podzielić na skończoną liczbę przedziałów otwartych, w których funkcja jest ciągła i monotoniczna;
- w punktach nieciągłości funkcja $x(t)$ ma granice lewo i prawostronne i jej wartość jest równa średniej arytmetycznej tych granic;

można przedstawić w postaci szeregu harmonicznego nieskończonego zwanego **szeregiem trygonometrycznym Fouriera**.

Szereg trygonometryczny Fouriera:

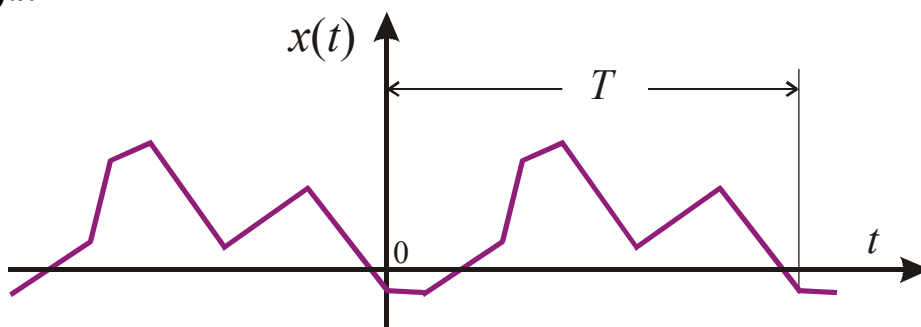
$$x(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_k) \tag{14.1}$$

składowa stała

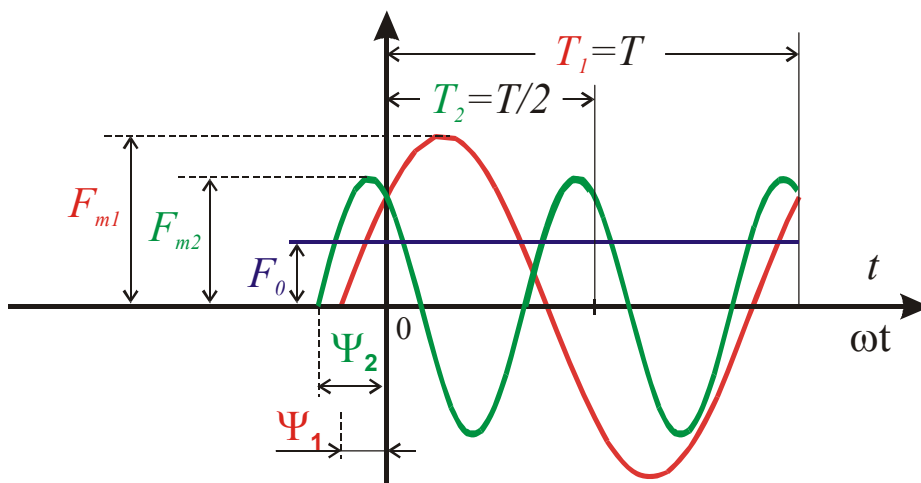
k -ta harmoniczna rozwinięcia Fouriera
 gdzie:
 $\omega_1 = 2\pi/T$ – pulsacja podstawowa
 k – rząd harmonicznej
 F_{mk} – amplituda k -tej harmonicznej
 Ψ_k – faza początkowa k -tej harmonicznej

Szereg zawiera wyraz niezależny od czasu i **SUMĘ harmonicznych** funkcji czasu o pulsacjach będących wielokrotnościami pulsacji podstawowej (pulsacji funkcji $x(t)$ równej $\omega_1 = 2\pi/T$). Wielkość sinusoidalną o $k=1$ nazywamy *harmoniczną podstawową* (pierwszą harmoniczną). Wielkości o $k > 1$ nazywamy wyższymi harmonicznymi

Interpretacja:



$$x(t) = F_0 + F_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_1) + F_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_2) + \dots$$



Wiadomo jednak, że

$$F_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_k) = F_{mk} (\sin k\omega_1 t \cos \Psi_k + \cos k\omega_1 t \sin \Psi_k) \quad (14.2)$$

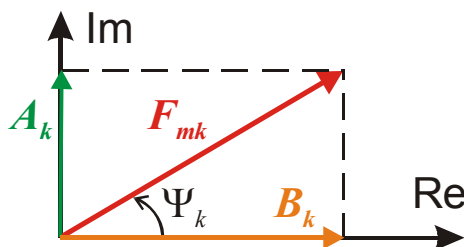
Jeśli oznaczymy

$$\begin{cases} F_{mk} \sin \Psi_k = A_k \\ F_{mk} \cos \Psi_k = B_k \end{cases} \quad (14.3)$$

to

$$F_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_k) = A_k \cos k\omega_1 t + B_k \sin k\omega_1 t \quad (14.4)$$

Gdy amplitudę k -tej harmonicznej przedstawimy jako wektor wirujący, to z zależności trygonometrycznych wynikają wzory



$$F_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (14.5)$$

$$\sin \Psi_k = \frac{A_k}{F_{mk}}, \quad \cos \Psi_k = \frac{B_k}{F_{mk}} \quad (14.6)$$

Uwzględniając powyższe zależności możemy szereg (14.1) przedstawić

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_1 t + B_k \sin k\omega_1 t) \quad (14.7)$$

składowa stała

k -ta harmoniczna rozwinięcia Fouriera

Współczynniki A_0 , A_k , B_k wyznacza się ze wzorów:

wartość średnia

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (14.8)$$

skład. kosinusoidalna

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_1 t dt \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (14.9)$$

skład. sinusoidalna

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_1 t dt \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (14.10)$$

B) WYKŁADNICZY (ZESPOLONY) SZEREG FOURIERA

Jeśli w rozwinięciu w szereg Fouriera danym wyrażeniem (14.7) zastosujemy podstawienie wynikające z wzorów Eulera

$$\cos k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}, \quad \sin k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \quad (14.11)$$

to otrzymamy

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + B_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right] \quad (14.12)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$C_0 = A_0, \quad \underline{C}_k = \frac{A_k - jB_k}{2}, \quad \underline{C}_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2} \quad (14.13)$$

stąd

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underline{C}_k e^{jk\omega_1 t} + \underline{C}_{-k} e^{-jk\omega_1 t} \right] \quad (14.14)$$

i ostatecznie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_1 t} \quad (14.15)$$

którą to postać nazywamy postacią zespoloną szeregu Fouriera.

***k*-ty współczynnik wykładniczego szeregu Fouriera**

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \boxed{C_k} e^{j\eta_k} \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.16)$$

moduł *k*-tego współczynnika wykładniczego szeregu Fouriera

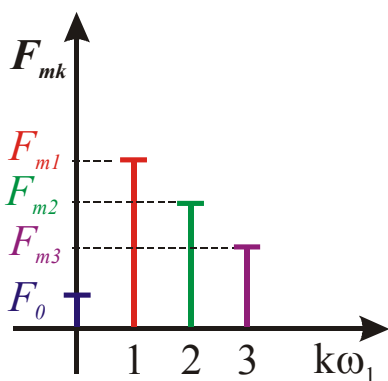
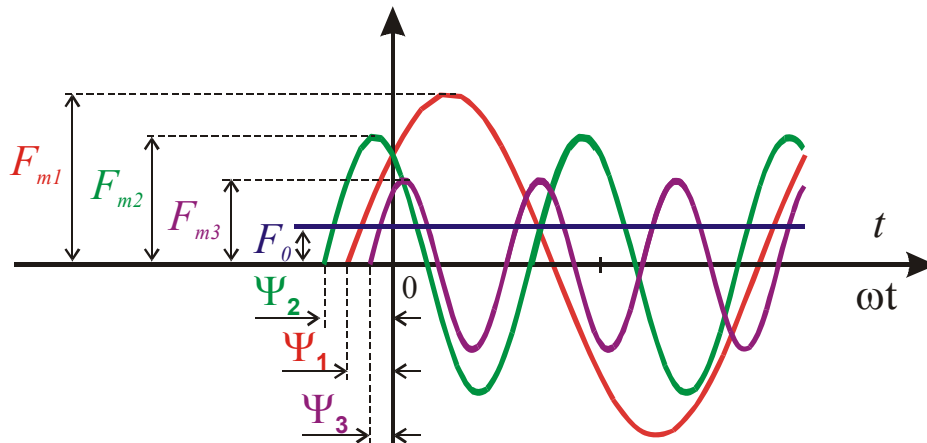
argument *k*-tego współczynnika wykładniczego szeregu Fouriera

Uwaga: $\underline{C}_k = \underline{C}_{-k}^*$

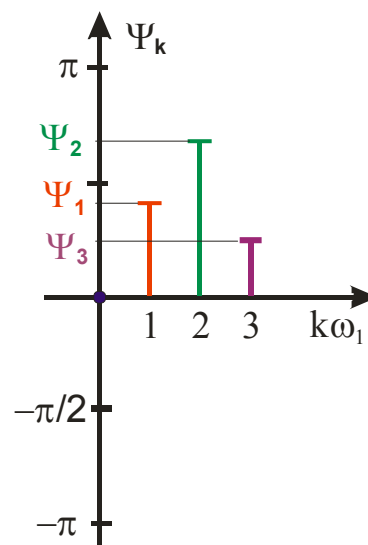
$$C_k = C_{-k} \quad i \quad \eta_k = -\eta_{-k}$$

C) WIDMO AMPLITUDOWE I FAZOWE

Wprowadzenie:



$$\begin{aligned}
 x(t) = & F_0 \\
 & + F_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_1) \\
 & + F_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_2) \\
 & + F_{m3} \sin(3\omega_1 t + \Psi_3) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$



Wykres, w układzie współrzędnych prostokątnych, stanowiący

- zbiór **modułów** C_k współczynników zespolonego szeregu Fouriera
lub
- zbiór amplitud F_{mk} poszczególnych harmoniczych

określony dla odpowiednich pulsacji $\omega=k\omega_1$ (bądź częstotliwości $f=kf_1$) nazywamy dyskretnym **WIDMEM AMPLITUDOWYM** sygnału $x(t)$.

- zbiór **argumentów** η_k współczynników zespolonego szeregu Fouriera
lub
- zbiór faz początkowych ψ_k poszczególnych harmoniczych

określony dla odpowiednich pulsacji $\omega=k\omega_1$ (bądź częstotliwości $f=kf_1$) nazywamy dyskretnym **WIDMEM FAZOWYM** sygnału $x(t)$.

Pomiędzy współczynnikami rozwinięcia w trygonometryczny i w zespolony szereg Fouriera zachodzą następujące związki:

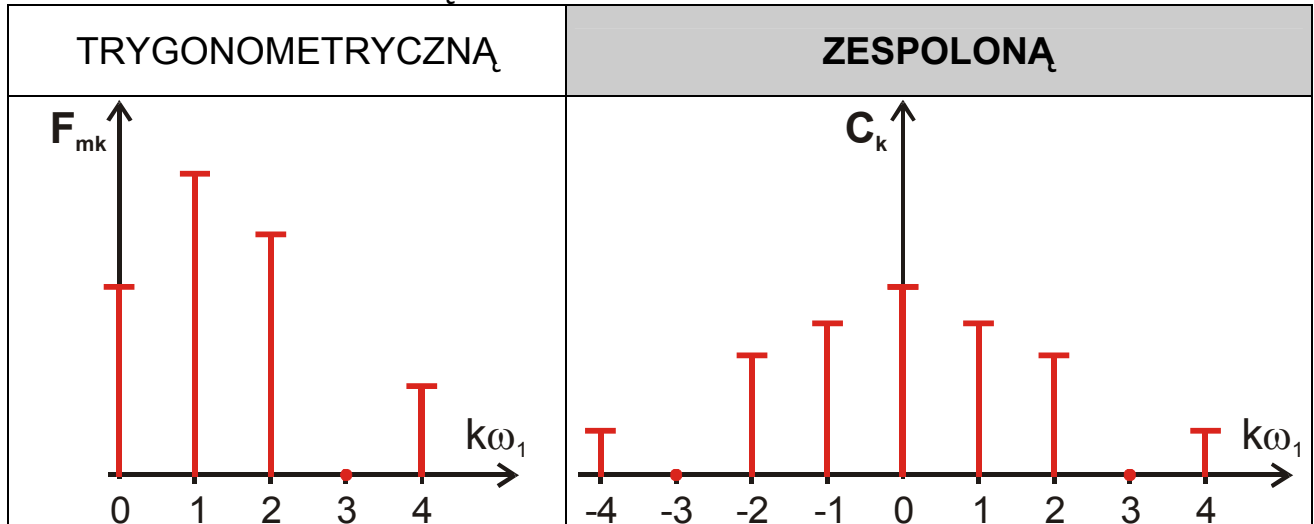
$$C_k = C_{-k} = \frac{F_{mk}}{2} = \frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}{2} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (14.17)$$

$$\eta_k = \Psi_k - \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (14.18)$$

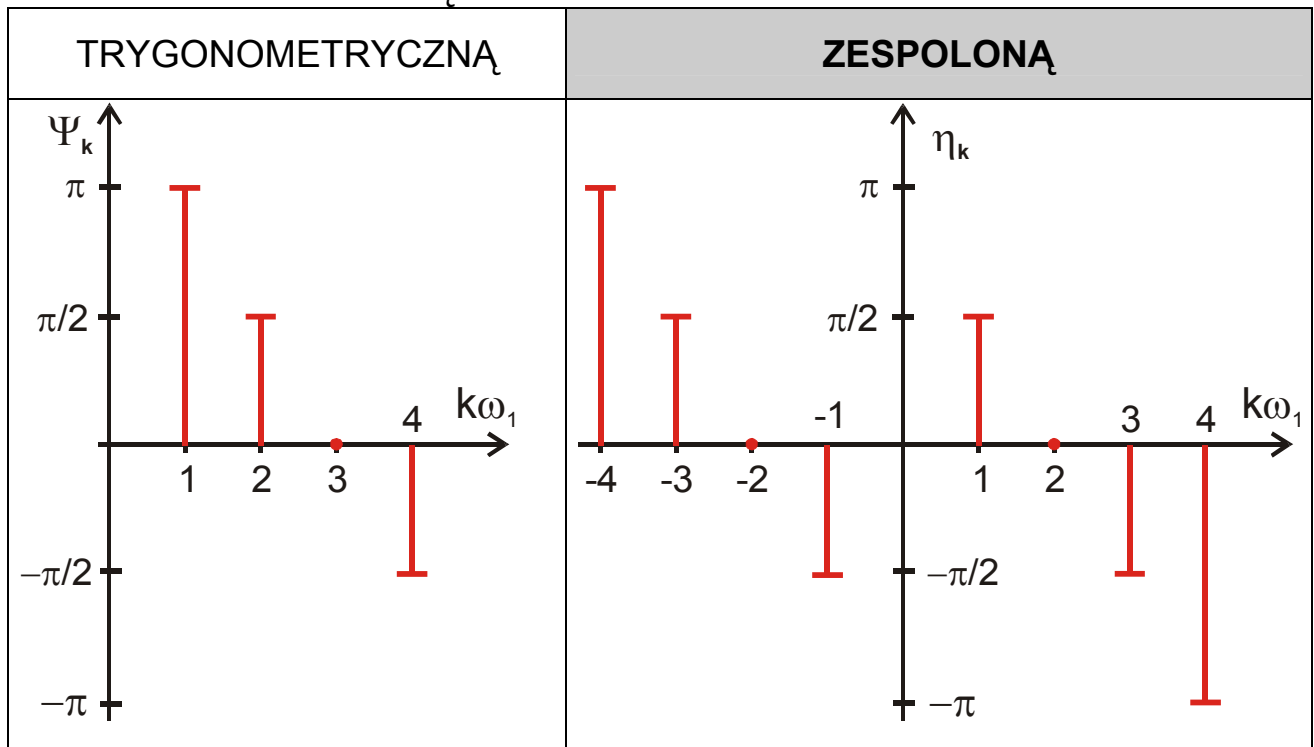
Znajomość obydwu widm, amplitudowego i fazowego jednoznacznie określa sumę częściową szeregu Fouriera czyli z założoną dokładnością opisuje analizowany sygnał $x(t)$. Widma (częstotliwościowe) są równoważnym opisem do analitycznego zapisu w dziedzinie czasu tego sygnału - jest to jego **reprezentacja widmowa**.

Wyjaśnienie:**WIDMO AMPLITUDOWE**

SPORZĄDZONE W OPARCIU O POSTAĆ:

**WIDMO FAZOWE**

SPORZĄDZONE W OPARCIU O POSTAĆ:



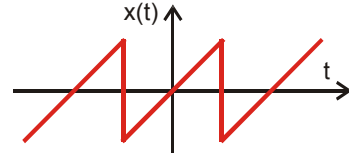
Widmo amplitudowe sygnału okresowego jest funkcją parzystą a widmo fazowe funkcją nieparzystą. Prawostronne widma amplitudowe i fazowe stanowią reprezentację sygnału okresowego w dziedzinie częstotliwości.

D) RODZAJE SYMETRII SYGNAŁÓW

1) SYMETRIA WZGLĘDEM POCZĄTKU UKŁADU WSPÓLRZĘDNYCH

Funkcję nazywamy *symetryczną względem początku układu współrzędnych* lub **funkcją nieparzystą** jeśli spełnia ona zależność

$$x(t) = -x(-t) \quad (14.19)$$

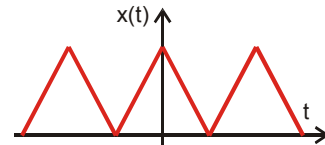


$A_0 = 0, A_k = 0$	$\Psi_k = \pi$ lub $\Psi_k = 0$
$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega_1 t \quad (14.20)$	

2) SYMETRIA WZGLĘDEM OSI RZĘDNYCH

Funkcję nazywamy *symetryczną względem osi rzędnych*, lub **funkcją parzystą** jeśli spełnia ona zależność

$$x(t) = x(-t) \quad (14.21)$$

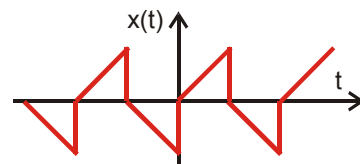


$B_k = 0$	$\Psi_k = \frac{\pi}{2}$ lub $\Psi_k = -\frac{\pi}{2}$
$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_1 t \quad (14.22)$	

3) SYMETRIA WZGLĘDEM OSI ODCIĘTYCH

Funkcję nazywamy **antysymetryczną** (*symetryczną względem osi odciętych*), jeśli rzędne funkcji okresowej powtarzają się co pół okresu ze zmienionym znakiem, tzn.

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (14.23)$$



$A_0 = 0$ i $A_{2n} = B_{2n} = 0$ dla $n = 1, 2, \dots$

E) WIDMO MOCY SYGNAŁU

$$\text{Moc średnia sygnał } P = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Moc sygnału okresowego $x(t)$, można również wyznaczyć w dziedzinie częstotliwości obliczając wartości mocy zawartej w każdej składowej harmonicznej. Przykładowo dla n -tej składowej harmonicznej:

$$P_n = \frac{1}{T} \int_0^T F_{mn}^2 \sin^2(n\omega_1 t + \Psi_n) dt = \frac{F_{mn}^2}{2} \quad (14.24)$$

Wyrażając funkcję okresową $x(t)$ za pomocą jej rozwinięcia w szereg trygonometryczny Fouriera otrzymujemy:

$$P = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_k^2 + B_k^2)}{2} = F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{mk}^2}{2} \quad (14.25)$$

Wyznaczając widmo mocy przebiegu okresowego $x(t)$ za pomocą **wykładniczego** szeregu Fouriera, korzysta się z **twierdzenia Parsevala**

$$\overline{x_1(\omega_1 t) x_2(\omega_1 t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{1k} C_{2k}^* \quad (14.26)$$

mówiącego: *wartość średnia za okres iloczynu dwóch funkcji okresowych o tym samym okresie jest równa sumie od $-\infty$ do $+\infty$ szeregu nieskończonego, którego wyrazami są iloczyny współczynników rozwinięcia wykładniczego jednej z tych funkcji przez współczynniki sprzężone rozwinięcia wykładniczego drugiej*

Czyli wartość średnia kwadratu funkcji okresowej zakładając

$$x_1(\omega_1 t) = x_2(\omega_1 t) = x(t) \quad \text{wynosi} \quad \overline{x^2(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^2 \quad (14.27)$$

Zatem:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^2 \quad (14.28)$$

Wówczas **WIDMEM MOCY** sygnału nazywamy wykres zmienności kwadratów modułów współczynników wykładniczego szeregu Fouriera.

F) APROKSYMACJA SYGNAŁU

W zagadnieniach praktycznych często zachodzi konieczność ograniczenia się do reprezentacji sygnału okresowego skończoną liczbą wyrazów szeregu Fouriera (do aproksymacji sygnału sumą częściową szeregu).

Ograniczamy się do uwzględnienia w rozwinięciu N -harmonicznych.

Zapiszemy to następująco:

$$x(t) \cong \sum_{k=-N}^{k=+N} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad (14.29)$$

Jako kryterium dokładności aproksymacji sygnału $x(t)$ sumą częściową jego rozwinięcia przyjmuje się błąd względny

$$\delta_{\varepsilon_N} = \frac{\varepsilon_{sk_N}}{X} \cdot 100\% \quad (14.30)$$

gdzie:

$$X - \text{wartość skuteczna sygnału } x(t) : X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{x^2(t)} = \sqrt{P}$$

$$\varepsilon_{sk_N} - \text{wartość skuteczna błędu} : \varepsilon_{sk_N} = \sqrt{X^2 - \sum_{k=-N}^{k=+N} C_k^2} = \sqrt{2 \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^2}$$

Jeśli a priori założymy pewną wartość błędu aproksymacji, to przy znajomości X , możemy ustalić ten rząd harmonicznego N , którego uwzględnienie w sumie częściowej zapewnia wymaganą dokładność. Mówimy wówczas, że sygnał $x(t)$ zajmuje pasmo $N\omega_1$ ($N \cdot f_1$).

Sens fizyczny tak określonego pasma wiąże się z mocą średnią sygnału a mianowicie, jeśli przyjęliśmy kryterium dokładności δ_{ε_N} to oznacza, że N uwzględnionych w rozwinięciu harmonicznego niesie $(100 - \delta_{\varepsilon_N})\%$ mocy jaką reprezentuje sobą sygnał $x(t)$.

PRZYKŁAD 1: Dany jest sygnał $u(t)$ będący ciągiem impulsów prostokątnych o okresie $T=1\text{ms}$, czasie trwania $t_i=0,25\text{ms}$ oraz amplitudzie $U_m=10\text{V}$. Wyznaczyć widmo amplitudowe i fazowe sygnału.

1) Opisujemy sygnał $u(t)$ analitycznie w przedziale czasu odpowiadającym okresowi:

$$u(t) = \begin{cases} U_m & \text{dla } -\frac{t_i}{2} < t < \frac{t_i}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{t_i}{2} < t < T - \frac{t_i}{2} \end{cases}$$

2) Wybieramy postać szeregu Fouriera, dla której będziemy rozwijali sygnał

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_1 t + B_k \sin k\omega_1 t)$$

3) Sprawdzamy rodzaj symetrii sygnał $u(t)$

Występuje symetria względem osi rzędnych ($f(t) = f(-t)$). Ponieważ jest to funkcja parzysta znikają wyrazy z sinusami ($B_k = 0$).

Zatem:

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_1 t$$

4) Obliczamy składową stałą $U_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt$

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m dt = \frac{1}{T} U_m t \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = U_m \frac{1}{T} \left(\frac{t_i}{2} + \frac{t_i}{2} \right) = U_m \frac{t_i}{T} = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2,5 [V]$$

5) Obliczamy współczynniki $A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos k\omega_1 t dt \quad k = 1, 2, \dots$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m \cos k\omega_1 t dt = \frac{2 U_m}{T} \frac{1}{k\omega_1} (\sin k\omega_1 t) \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}$$

$$A_k = \frac{2 U_m}{T} \frac{1}{k\omega_1} \left[\sin \left(k\omega_1 \frac{t_i}{2} \right) - \sin \left(-k\omega_1 \frac{t_i}{2} \right) \right] \quad \left\langle \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \right.$$

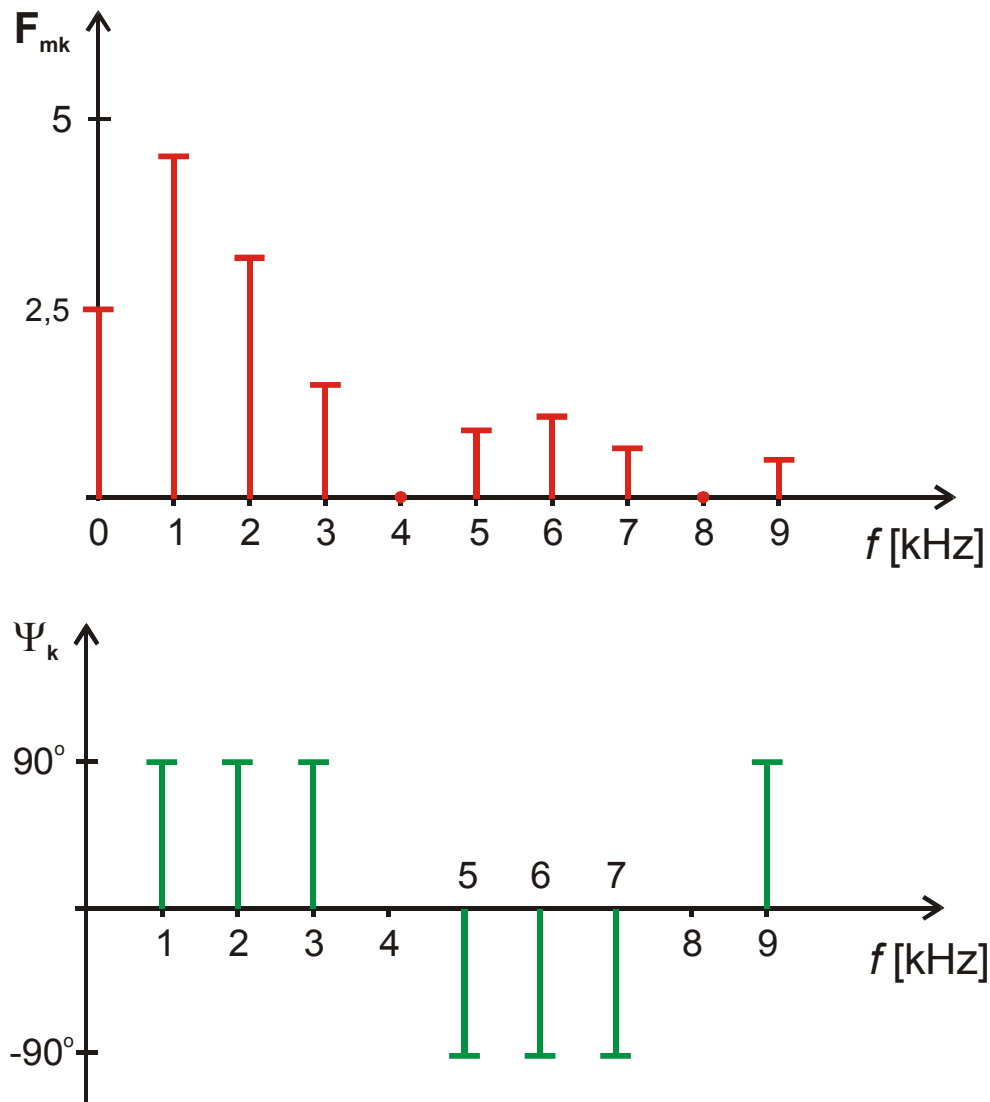
$$= \frac{U_m}{k\pi} \left[\sin \left(k \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(-k \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \left\langle \sin \left(-k \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(k \frac{\pi}{4} \right) \right.$$

$$= \frac{U_m}{k\pi} \left[\sin \left(k \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(k \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{2 U_m}{k\pi} \sin \left(k \frac{\pi}{4} \right) = \frac{6,37}{k} \sin \left(k \frac{\pi}{4} \right)$$

6) Obliczamy wartości amplitud i faz początkowych N-harmonicznych

k	A_k	$F_{mk} = \sqrt{A_k^2}$	$\Psi_k = \arcsin \frac{A_k}{F_{mk}}$
1.	4,502	4,502	90°
2.	3,183	3,183	90°
3.	1,501	1,501	90°
4.	0	0	-
5.	-0,9	0,9	-90°
6.	-1,061	1,061	-90°
7.	-0,643	0,643	-90°
8.	0	0	-
9.	0,5	0,5	90°

7) Przedstawiamy widmo amplitudowe i fazowe sygnału



PRZYKŁAD 2: Wyznaczyć widmo mocy sygnału z przykładu 1. Określić błąd względny aproksymacji sygnału sumą częściową dla $N=3$.

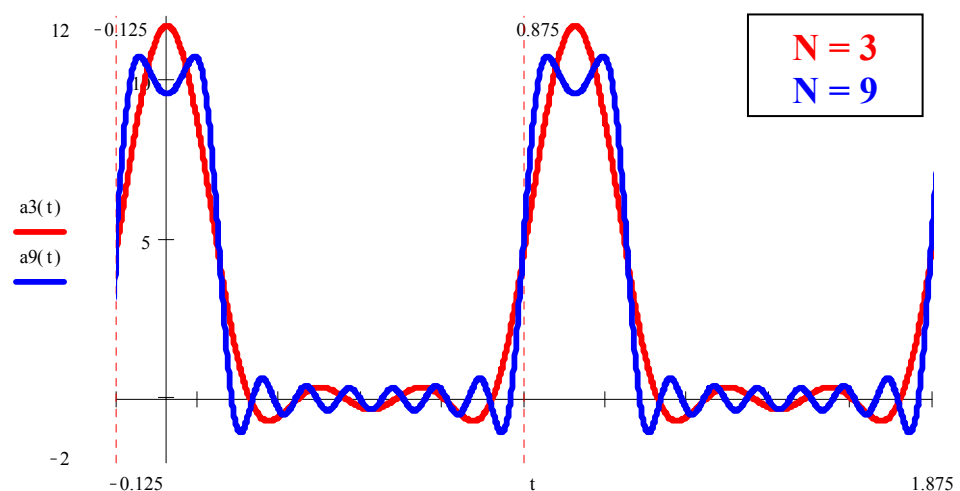
k	-3	-2	-1	0	1	2	3
F_{mk}	-	-	-	2,5	4,502	3,183	1,501
$C_k = \frac{F_{mk}}{2}$	0,75	1,591	2,251	2,5	2,251	1,591	0,75
C_k^2	0,563	2,533	5,067	6,25	5,067	2,533	0,563
$\sum_{k=-3}^3 C_k^2$	22,576						

wartość skuteczna sygnału $x(t)$: $X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{P} = 5$

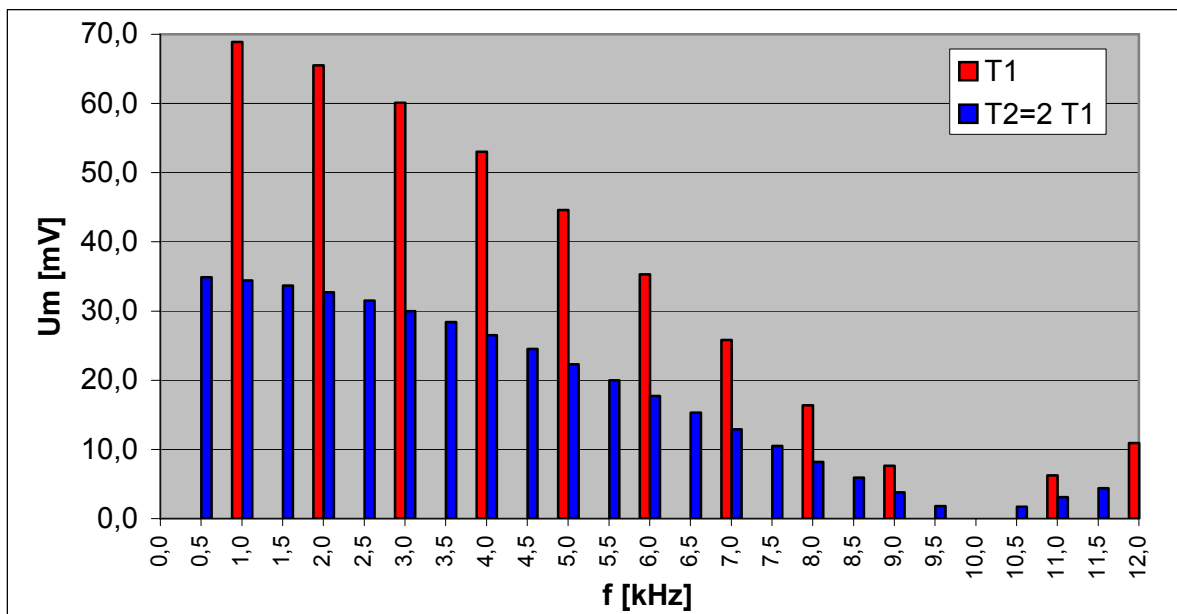
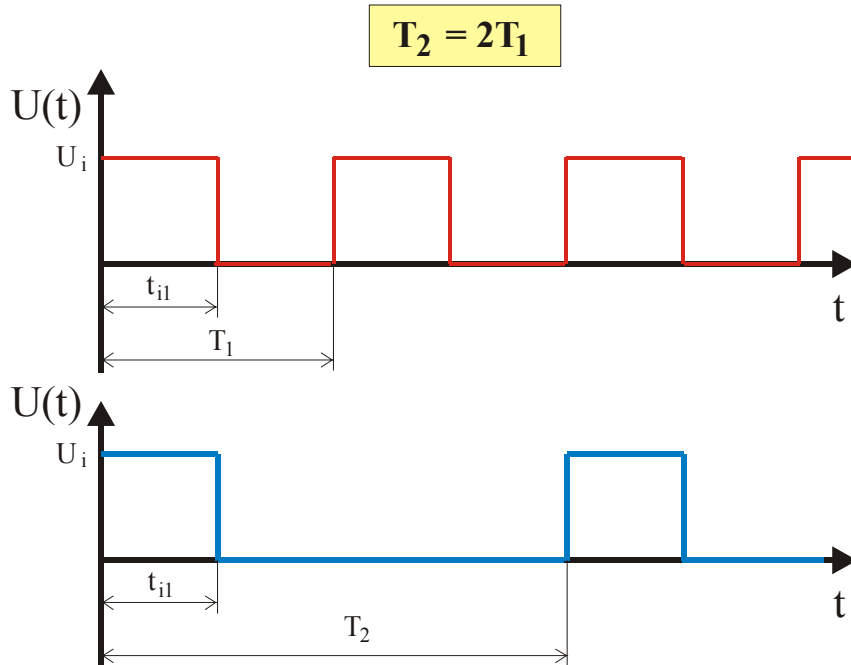
wartość skuteczna błędu : $\varepsilon_{sk_N} = \sqrt{X^2 - \sum_{k=-3}^3 C_k^2} = 1,557$

błąd względny: $\delta_{\varepsilon_N} = \frac{\varepsilon_{sk_N}}{X} \cdot 100\% = 31,14\%$

Czyli rozwinięcie sygnału z przykładu 1, uwzględniające składową stałą oraz trzy pierwsze harmoniczne niesie 68,86% mocy jaką reprezentuje sobą ten sygnał.

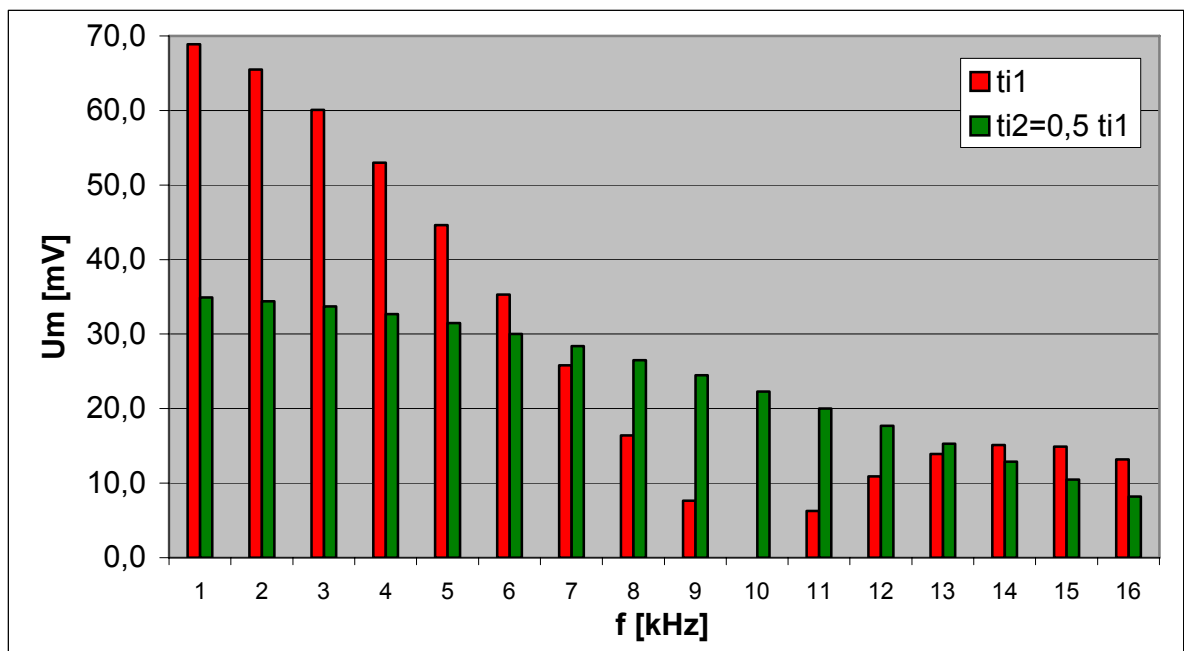
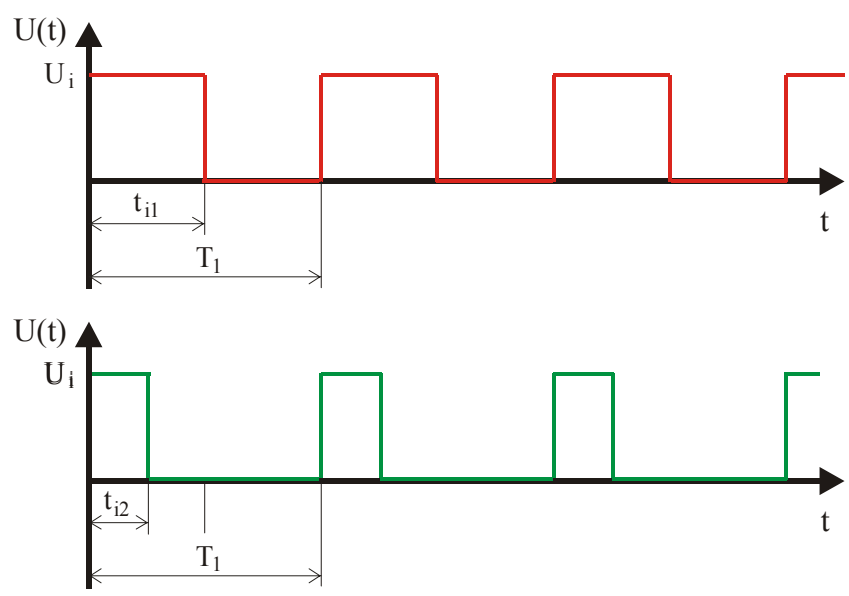


PRZYKŁAD 3: Ilustracja wpływu dwukrotnego zwiększenia okresu na widmo amplitudowe ciągu impulsów prostokątnych



PRZYKŁAD 4: Ilustracja wpływu dwukrotnego zmniejszenia czasu trwania impulsu na widmo amplitudowe ciągu impulsów prostokątnych

$t_{i2} = 0,5t_{i1}$



14.2. ANALIZA OBWODÓW SLS PRĄDU ODKSZTAŁCONEGO

Założmy, że do dwójnika zawierającego elementy R , L w połączeniu szeregowym przyłożono napięcie odkształcone $u(t)$. Wielkością poszukiwaną jest prąd płynący przez elementy dwójnika. Rozwinięcie rozpatrywanego wymuszenia w szereg Fouriera ma postać

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_{uk}) \\ &= U_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots \\ &= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \end{aligned} \quad (14.31)$$

Stosujemy zasadę superpozycji w sposób następujący:

1. Przyjmujemy, że jedynym wymuszeniem jakie działa na obwód jest źródło napięcia stałego U_0 i rozpatrywany obwód obliczamy za pomocą metod dotyczących obwodów prądu stałego, wyznaczając prąd I_0 ;
2. Przyjmujemy, że jedynym wymuszeniem jakie działa jest k -te źródło napięcia harmonicznego o napięciu

$$u_k(t) = U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_{uk})$$

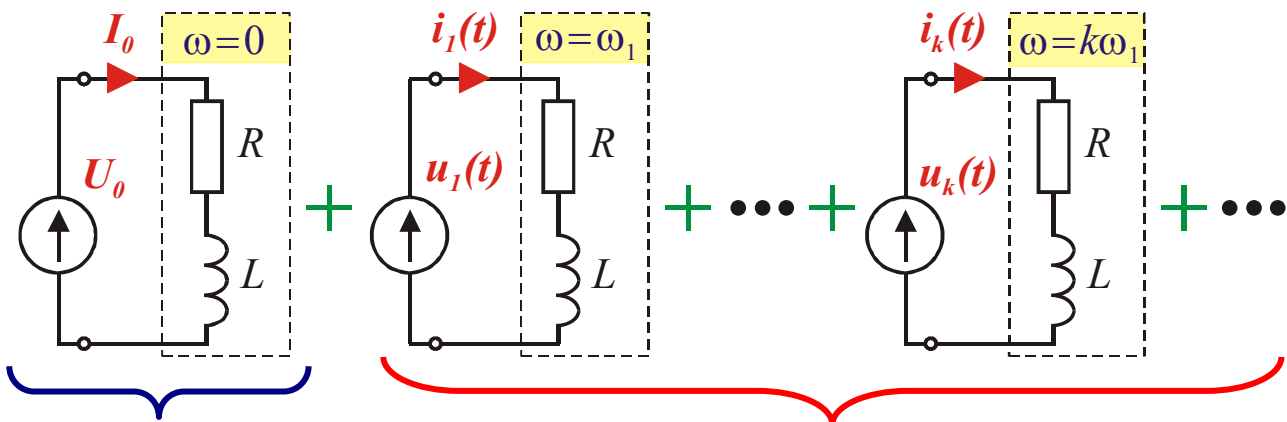
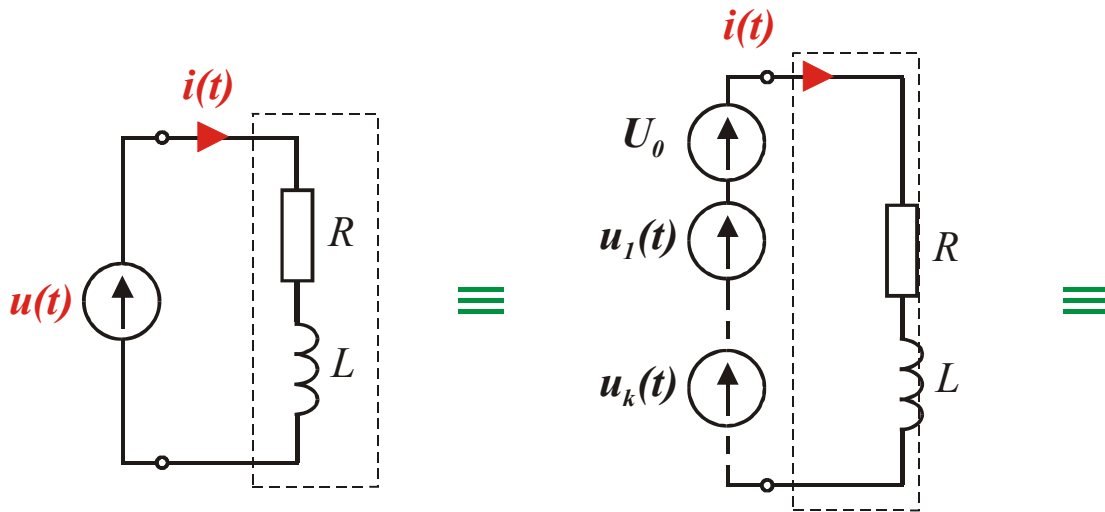
i za pomocą metod obliczania obwodów prądu harmonicznego wyznaczamy prąd obwodu

$$i_k(t) = I_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_{ik}),$$

obliczenie to powtarzamy wielokrotnie, przyjmując kolejno $k=1,2,3,\dots$

Zgodnie z zasadą superpozycji przez elementy obwodu płynie prąd

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) \\ &= I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_{ik}) \end{aligned} \quad (14.32)$$



Obwód prądu stałego

Obwody prądu harmonicznego

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$$u_k(t) = U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_{uk})$$

$$\underline{U}_{mk} = U_{mk} e^{j\Psi_{uk}}$$

$$\underline{I}_{mk} = \frac{\underline{U}_{mk}}{\underline{Z}_k}$$

$$\underline{Z}_k = R + jk\omega L = \sqrt{R^2 + (k\omega L)^2} e^{j \arctg\left(\frac{k\omega L}{R}\right)}$$

$$\underline{I}_k = \frac{U_{mk}}{\sqrt{R^2 + (k\omega L)^2}} e^{j\left[\Psi_{uk} - \arctg\left(\frac{k\omega L}{R}\right)\right]} = I_{mk} e^{j\Psi_{ik}}$$

$$i_k(t) = I_{mk} \sin(k\omega_1 t + \Psi_{ik})$$

PRZYKŁAD 5: Ilustracja wpływu przenoszenia sygnału odkształconego przez układ liniowy o znanej strukturze

Filtr dolnoprzepustowy RC I-rzędu , $f_g = 5\text{kHz}$

Parametry ciągu imp. prostokątnych : $T = 1\text{ ms}$, $t_i = 10\text{ }\mu\text{s}$

