16. CHARAKTERYSTYKI CZASOWE UKŁADÓW SLS

16.1. SPLOT FUNKCJI

A) DEFINICJA

Niech dane będą dwie funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ całkowalne w każdym przedziale (t_1,t_2), $0\le t_1\le t_2<\infty$, wówczas splotem tych funkcji nazywać będziemy funkcję $q(t)$ określoną dla $t\ge 0$ w sposób następujący

$$q(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \qquad (16.1)$$

Operację tworzenia splotu nazywamy **splataniem** funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ lub ich **mnożeniem splotowym**.

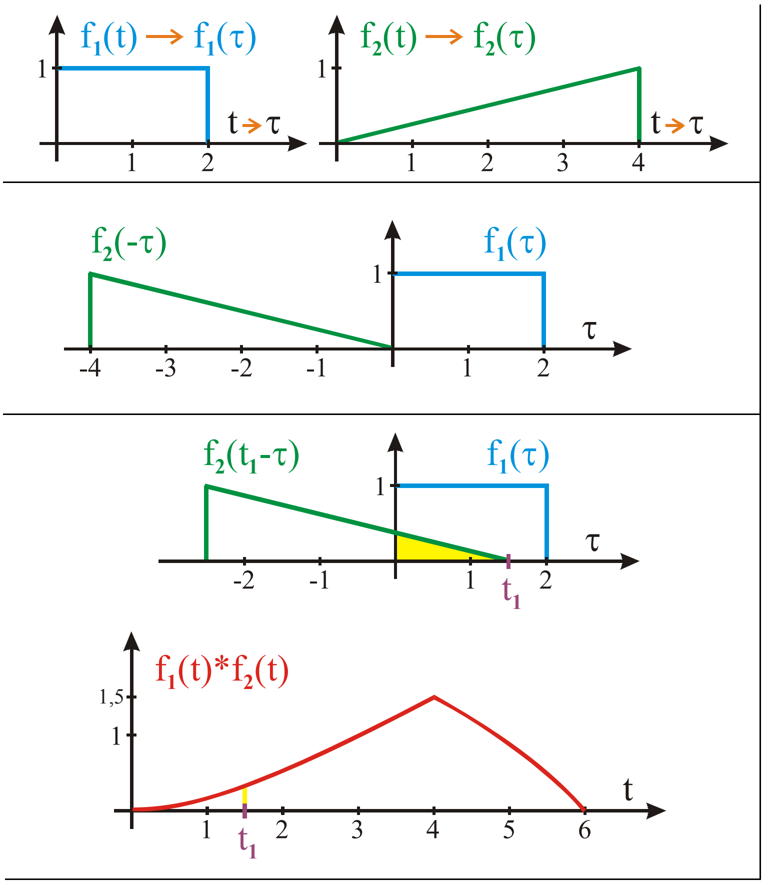
Interpretacja graficzna splotu

Rozpatrzmy funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ - w pierwszym etapie wykreślamy funkcje $f_1(\tau)$ i $f_2(\tau)$ przyjmując τ za zmienną całkowania

W etapie drugim tworzymy lustrzane odbicie $f_2(-\tau)$ funkcji $f_2(\tau)$

Następnie przesuwamy funkcję $f_2(-\tau)$ wzdłuż osi τ o pewną wartość, przyjmijmy t_1 – w efekcie uzyskujemy funkcję $f_2(t_1-\tau)$.

Całkujemy iloczyn funkcji $f_1(\tau)\cdot f_2(t_1-\tau)$ ze względu na τ - jest to pole pod krzywą wypadkową funkcji $f_1(\tau)$ i $f_2(t_1-\tau)$. Wartość splotu $f_1(t)*f_2(t)$ w chwili $t=t_1$ jest równa temu polu powierzchni.



dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

B) WŁASNOŚCI SPLOTU

własność 1 - splatanie funkcji jest przemienne:

$$\boxed{f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau} \quad (16.2)$$

własność 2 - splatanie funkcji jest łączne:

$$\boxed{f_1(t)*f_2(t)*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)} \quad (16.3)$$

własność 3 - splatanie funkcji jest rozdzielne względem dodawania:

$$\boxed{[f_1(t)+f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)} \quad (16.4)$$

splot funkcji f(t) z funkcją jednostkową 1(t)

$$\boxed{f(t)*1=\int_0^t f(\tau)\,d\tau} \quad \mathbf{(16.5)}$$

Zatem mnożenie splotowe funkcji f(t) przez funkcję jednostkową 1(t) jest równoznaczne z całkowaniem funkcji f(t) w przedziale (0,t)

splot funkcji f(t) z funkcją impulsową Diraca δ(t)

Na podstawie definicji $$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$$

Ponieważ δ(t) istnieje tylko przy τ=0 - co oznacza, że należy brać pod uwagę wartość funkcji f(t-τ) tylko w punkcie τ=0, a więc f(t-τ) może być zastąpiona przez f(t). Zatem

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t)\,d\tau=f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau=f(t)\cdot 1$$

stąd $$\boxed{f(t)*\delta(t)=f(t)} \quad \mathbf{(16.6a)}$$

Ponadto $$\boxed{f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)} \quad \mathbf{(16.6b)}$$

C) TWIERDZENIE BORELA O SPLOCIE

Jedną z najważniejszych właściwości przekształcenia Laplace'a jest twierdzenie o splocie tzw. **twierdzenie Borela**:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)} \qquad \textbf{(16.7a)}$$

lub

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s) \cdot F_2(s)\right] = f_1(t) * f_2(t)} \qquad (16.7b)$$

gdzie: $F_1(s) = \mathcal{L}\left[f_1(t)\right], \quad F_2(s) = \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$

D) TWIERDZENIE O TRANSFORMACIE POCHODNEJ SPLOTU

Transformata Laplace'a pochodnej splotu

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right]\right] = s\, F_1(s) F_2(s)} \qquad \textbf{(16.8a)}$$

czyli

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[s\, F_1(s) F_2(s)\right] = \frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right]} \qquad (16.8b)$$

E) CAŁKA DUHAMELA

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \qquad (16.9)$$

wyrażenie to nazywamy **całką Duhamela** (**całką superpozycji**)

Zgodnie z twierdzeniem o różniczkowaniu całki względem parametru (jeśli obie funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mają ciągłe pochodne dla $t>0$) napiszemy

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = f_1(t) f_2\left(0^+\right) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau)\,d\tau \qquad (16.10a)$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau = f_1\left(0^+\right) f_2(t) + \int_0^t f_1'(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau \qquad (16.10b)$$

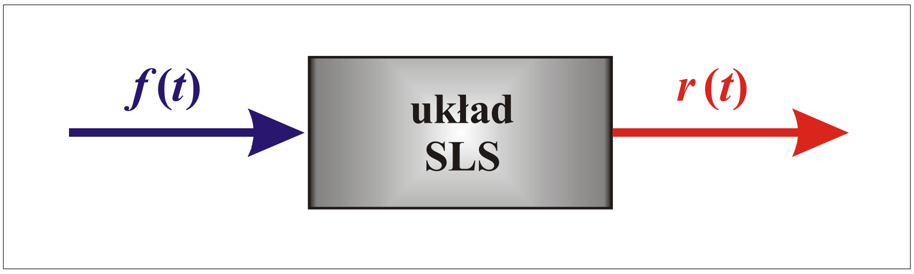
a korzystając z przemienności splotu otrzymamy pozostałe postacie całki Duhamela

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = f_1(t) f_2\left(0^+\right) + \int_0^t f_1(t-\tau) f_2'(\tau)\,d\tau \qquad (16.10c)$$

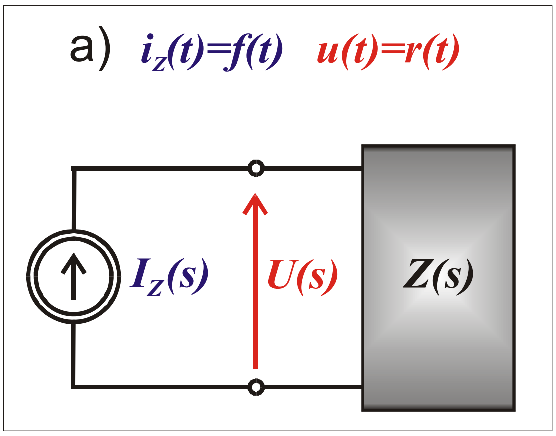
$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = f_1\left(0^+\right) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \qquad (16.10d)$$

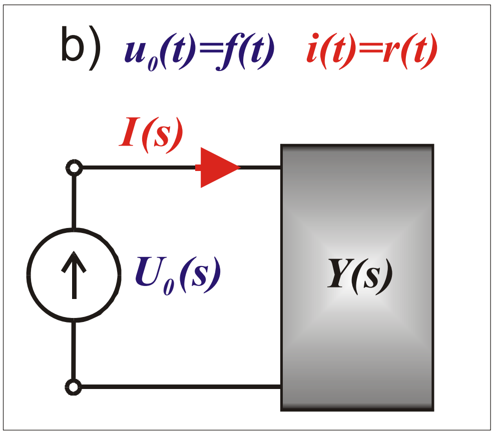
16.2. OPERATOROWE FUNKCJE UKŁADU

Rozpatrzmy układ elektryczny, na który działa wymuszenie przyczynowe f(t) (napięciowe lub prądowe) i dla którego poszukiwaną funkcją jest odpowiedź r(t) (prądowa lub napięciowa).



Jeśli wielkości f(t) i r(t) występują na tych samych zaciskach to rozpatrywany układ staje się **dwójnikiem**. Jego stan opisany jest parą funkcji: prądu wejściowego i napięcia





W zależności od wymuszenia odpowiedź wyznaczamy ze wzoru

$$U(s)=Z(s)\,I_Z(s) \qquad (16.11a)$$

$$I(s)=Y(s)\,U_0(s) \qquad (16.11b)$$

gdzie:

Z(s) – operatorowa **IMpedancja**

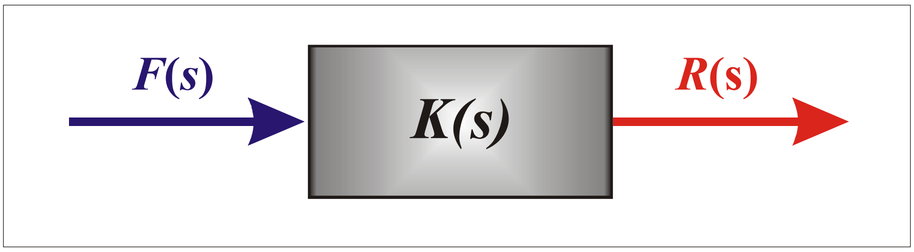
Y(s) – operatorowa **adMITANCJA**

Dla obu tych funkcji układu spełniających związek

$$Y(s)\,Z(s)=1 \qquad (16.12)$$

stosujemy określenie : **operatorowa IMMITANCJA**

W przypadku wyodrębnienia dwóch par zacisków mamy do czynienia z **czwórnikiem**. Jeśli wymuszenie jest związane z jedną bramą a odpowiedź z drugą to relacje pomiędzy nimi - **stosunek odpowiedzi do wymuszenia nazywamy TRANSMITANCJĄ operatorową.**

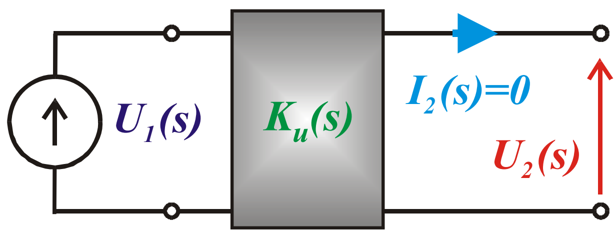


$$\boxed{K(s) = \left.\frac{R(s)}{F(s)}\right|_{przy\ \ zerowych\ \ W.P.}} \qquad \textbf{(16.13)}$$

czyli

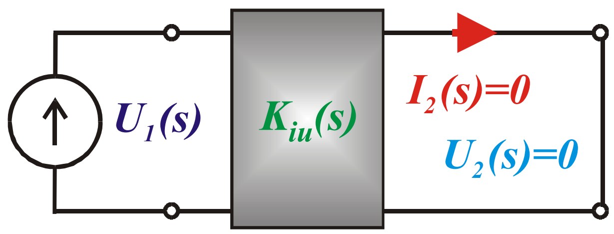
$$\boxed{R(s) = K(s)F(s)} \qquad \textbf{(16.14)}$$

Wyróżniamy operatorową:



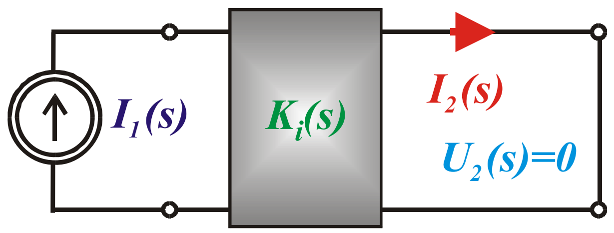
transmitancję napięciową

$$K_u(s) = \left.\frac{U_2(s)}{U_1(s)}\right|_{I_2(s)=0} \qquad (16.15a)$$



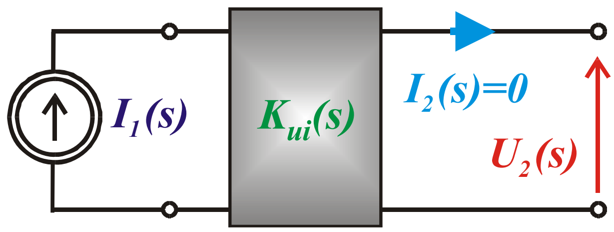
transmitancję prądowo-napięciową

$$K_{iu}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2(s)=0} \qquad (16.15b)$$



transmitancję prądową

$$K_i(s) = \left.\frac{I_2(s)}{I_1(s)}\right|_{U_2(s)=0} \qquad (16.15c)$$



transmitancję napięciowo-prądową

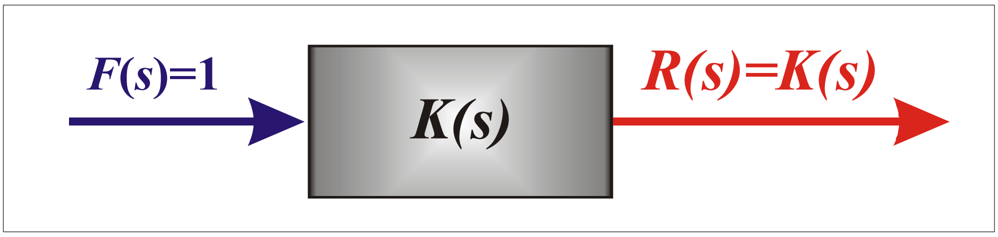
$$K_{ui}(s) = \left.\frac{U_2(s)}{I_1(s)}\right|_{I_2(s)=0} \qquad (16.15d)$$

Rozpatrzmy dwa szczególne przypadki funkcji wymuszającej f(t)

① Gdy funkcją wymuszającą jest **funkcja impulsowa Diraca δ(t)**

Czyli $f(t)=\delta(t) \;\rightarrow\; \mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=F(s)=1$

wówczas
$$\boxed{R(s)=K(s)F(s)=K(s)1=K(s)} \tag{16.16}$$

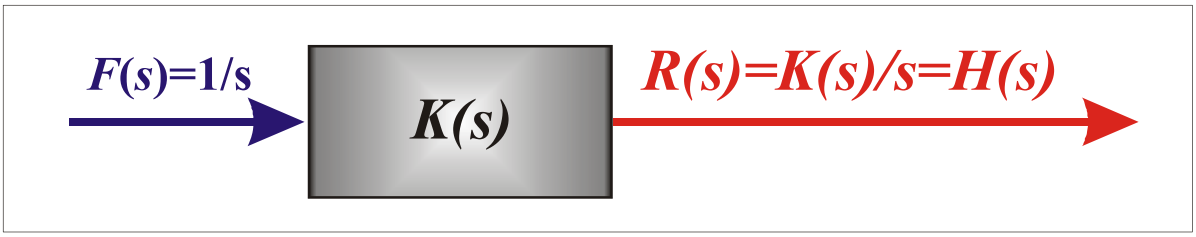


Oznacza to, że funkcja transmitancji K(s) jest tożsama z operatorową odpowiedzią układu na wymuszenie impulsowe. Można zatem nazwać ją **operatorową funkcją impulsową układu**.

② Gdy funkcją wymuszającą jest **funkcja skoku jednostkowego 1(t)**

Czyli $f(t)=1(t) \;\rightarrow\; \mathcal{L}\left[1(t)\right]=F(s)=\frac{1}{s}$

wówczas
$$\boxed{R(s)=K(s)F(s)=K(s)\frac{1}{s}=H(s)} \tag{16.17}$$



Tę szczególną odpowiedź H(s) nazywamy **operatorową odpowiedzią układu na wymuszenie skokiem jednostkowym.**

Zatem relacje pomiędzy operatorową funkcją impulsową układu K(s) i operatorową odpowiedzią układu na wymuszenie skokiem jednostkowym H(s) są następujące:

$$\left.\begin{aligned} H(s)&=\frac{K(s)}{s}\\ K(s)&=s\,H(s)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.18)}$$

Znajomość jednej z tych funkcji pozwala łatwo określić drugą.

16.3. CHARAKTERYSTYKI CZASOWE

Czasową charakterystykę układu o określonym wejściu i wyjściu - stanowi przebieg sygnału wyjściowego, gdy na wejściu działa wymuszenie będące sygnałem wzorcowym.

Najczęściej używanymi sygnałami wzorcowymi w procesach badania układów są:

① **sygnał impulsowy δ(t)**

② **sygnał skoku jednostkowego 1(t)**

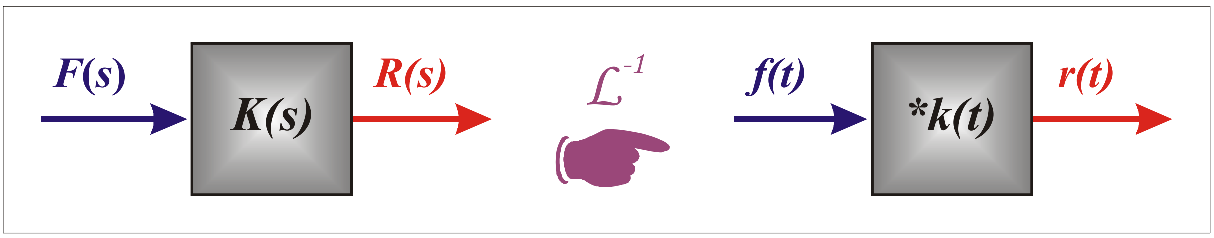
Rozpatrzmy ponownie zależność (16.14)

$$R(s)=K(s)F(s)$$

gdzie:
$F(s)$ = $\mathcal{L}[f(t)]$ – jest transformatą wymuszenia
$K(s)$ = $\mathcal{L}[k(t)]$ – jest transmitancją operatorową

Zatem zgodnie z twierdzeniem Borela (16.7b) oryginał odpowiedzi *r*(t) określony jest funkcją splotu

$$r(t)=k(t)*f(t) \qquad \textbf{(16.19)}$$



A) CHARAKTERYSTYKA IMPULSOWA

① Jeśli sygnałem wzorcowym jest **funkcja impulsowa Diraca δ(t)**

to zgodnie z (16.19) i (16.16)

$$\boxed{\begin{aligned} r(t) &= k(t) * \delta(t) = k(t) \\ r(t) &= \mathcal{L}^{-1}[K(s)] = k(t) \end{aligned}} \qquad \mathbf{(16.20)}$$

zatem ***k(t)*** – zwana **CHARAKTERYSTYKĄ IMPULSOWĄ UKŁADU** (funkcją/charakterystyką impulsową) jest tożsama z odpowiedzią układu na wymuszenie impulsem Diraca.

B) CHARAKTERYSTYKA SKOKOWA

② Jeśli sygnałem wzorcowym jest **funkcja skoku jednostkowego 1(t)**

to zgodnie z (16.17)

$$\boxed{r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} K(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t)} \qquad \mathbf{(16.21)}$$

zatem ***h(t)*** – zwana **CHARAKTERYSTYKĄ SKOKOWĄ UKŁADU** (funkcją/charakterystyką przejściową) jest tożsama z odpowiedzią układu na wymuszenie skokiem jednostkowym.

C) ZWIĄZKI POMIĘDZY CHARAKTERYSTYKAMI

Z relacji (16.18) wynikają następujące związki

$$\boxed{\left.\begin{aligned} H(s) = \frac{K(s)}{s} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = \int_0^t k(\tau)\, d\tau \\ K(s) = s\, H(s) &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} k(t) = \frac{d\, h(t)}{d\, t} \end{aligned}\right\}} \qquad \mathbf{(16.19)}$$

Znając charakterystykę czasową układu $r_s(t)$ jako odpowiedź na sygnał wzorcowy $f_s(t)$, **możemy wyznaczyć odpowiedź układu na dowolny sygnał przyczynowy**, korzystając z zależności

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_s(s)}{F_s(s)}F(s)\right] \tag{16.23}$$

♦ Mając **charakterystykę impulsową k(t)** można wyznaczyć odpowiedź układu na dowolny sygnał przyczynowy f(t), korzystając z twierdzenia Borela (16.7) oraz definicji splotu (16.1) i jego własności (16.2):

$$r(t) = \int_0^t k(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \tag{16.24a}$$

$$r(t) = \int_0^t k(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{16.24b}$$

♦ Mając **charakterystykę skokową h(t)** można wyznaczyć odpowiedź układu na dowolny sygnał przyczynowy f(t), korzystając z twierdzenia o transformacie pochodnej splotu (16.8) oraz całki Duhamela (16.10):

$$r(t) = h(t) f(0) + \int_0^t h(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau \tag{16.25a}$$

$$r(t) = h(0) f(t) + \int_0^t h'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{16.25b}$$

$$r(t) = h(t) f(0) + \int_0^t h(t-\tau) f'(\tau)\, d\tau \tag{16.25c}$$

$$r(t) = h(0) f(t) + \int_0^t h'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \tag{16.25d}$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

PRZYKŁAD 1: Znając charakterystykę przejściową układu

$$h(t)=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)1(t)$$

Wyznaczyć odpowiedź tego układu (prąd w obwodzie $i(t)$) na wymuszenie przyczynowe liniowe $f(t) = t1(t)$ w zależności od parametrów pierwotnych tego układu.

Zal. (16.25c)

$$\boxed{r(t)=h(t)f(0)+\int_0^t h(t-\tau)f'(\tau)d\tau}$$

$$f(0)=0 \qquad f'(\tau)=1(\tau)$$

$$i(t)=\underbrace{h(t)\cdot 0}_{0}+\int_0^t \frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right)1(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{R}\int_0^t 1(\tau)d\tau-\frac{1}{R}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}t+\frac{R}{L}\tau}1(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{R}\,\tau\Big|_0^t-\frac{1}{R}\left(\frac{L}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t+\frac{R}{L}\tau}\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{R}t-\frac{L}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t+\frac{R}{L}t}-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=$$

$$=\frac{1}{R}t-\frac{L}{R^2}\left(e^{0}-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{R}t-\frac{L}{R^2}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right]1(t)$$

dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl

16.4. ZWIĄZKI MIĘDZY CHARAKTERYSTYKAMI CZASOWYMI I CZĘSTOTLIWOŚCIOWYMI

WPROWADZENIE

Znajomość transmitancji bądź immitancji operatorowej układu pozwala wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową stanu ustalonego dla układu klasy SLS, stabilnego, prawie we wszystkich punktach $\omega\in(0.\infty)$, przez proste podstawienie $s=j\omega$. Zatem

$$\boxed{K(j\omega)=K(s)\,\Big|_{\,s=j\omega}} \qquad \textbf{(16.26)}$$

Wykorzystując jednostronne przekształcenie Laplace'a (10.13) możemy powyższe równanie przekształcić w zależność słuszną dla $\omega\in(0.\infty)$

$$\boxed{K(j\omega)=\int_0^\infty k(t)e^{-st}d\,t\,\Bigg|_{\,s=j\omega}=\int_0^\infty k(t)e^{-j\varpi t}d\,t} \qquad \textbf{(16.27)}$$

Otrzymujemy zatem ***jednostronne przekształcenie Fouriera***, które istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^\infty |k(t)|\,dt<\infty$$

Jak wiemy K(jω), czyli charakterystyka amplitudowo-fazowa, jest wielkością zespoloną, którą możemy przedstawić w postaci algebraicznej lub wykładniczej:

$$K(j\omega)=|K(j\omega)|\,e^{j\arg K(j\omega)}=K(\omega)\,e^{j\arg K(j\omega)}$$

ZWIĄZKI GRANICZNE CHARAKTERYSTYK

Twierdzenie o wartości początkowej i końcowej funkcji f(t):

- jeśli $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=f\left(0^+\right)$, to

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} sF(s)=f\left(0^+\right)} \tag{16.28}$$

- jeśli $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)$, to

$$\boxed{\lim_{s\to 0} sF(s)=f(\infty)} \tag{16.29}$$

Zatem jeśli operatorową funkcją układu jest transmitancja K(s) a charakterystyka impulsowa posiada skończone granice zarówno dla $t\to 0^+$ jak i $t\to\infty$, to słuszne są związki

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} s\,K(s)=k(\infty) \\ &\lim_{s\to\infty} s\,K(s)=k\left(0^+\right) \end{aligned}\right\}} \tag{16.30}$$

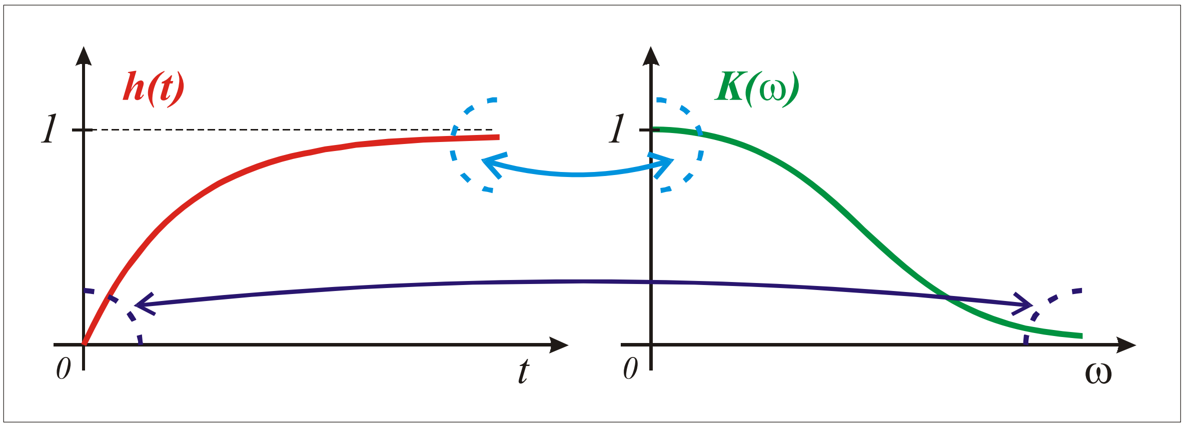
Jeśli weźmiemy pod uwagę charakterystykę skokową (przejściową) układu, to możemy zapisać przy założeniu, że h(t) posiada granice zarówno dla $t\to 0^+$ jak i $t\to\infty$ oraz uwzględniając zależności (16.18)

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} s\,H(s)=\lim_{s\to 0} K(s)=h(\infty) \\ &\lim_{s\to\infty} s\,H(s)=\lim_{s\to\infty} K(s)=h\left(0^+\right) \end{aligned}\right\}} \tag{16.31}$$

następnie uwzględniając wzór (16.26) otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{s\to 0} K(s)\Big|_{s=j\omega} &= \lim_{\omega\to 0} K(\omega) = h(\infty) \\ \lim_{s\to\infty} K(s)\Big|_{s=j\omega} &= \lim_{\omega\to\infty} K(\omega) = h(0^+) \end{aligned}\right\} \tag{16.32}$$

Są to związki o bardzo dużym znaczeniu praktycznym. Wynika z nich jednoznacznie, że jeśli znamy np. charakterystykę amplitudową K(ω), to jej graniczne wartości określają jednoznacznie graniczne wartości funkcji skokowej (przejściowej) h(t) i odwrotnie.



ZWIĄZKI PARAMETRÓW CHARAKTERYSTYK

Jako podstawowe parametry charakterystyk czasowych przyjmuje się między innymi:

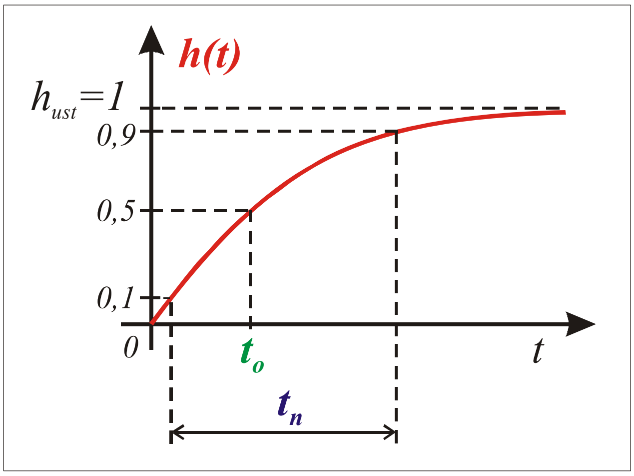
t_n – czas narastania,
t_o – czas opóźnienia,
Z - zwis

Czas narastania t_n - układu dolnoprzepustowego definiujemy jako czas wzrostu charakterystyki skokowej (przejściowej) układu od 0,1 do 0,9 wartości ustalonej

$$\boxed{t_n = t_{0,9} - t_{0,1}} \tag{16.33}$$

Czas opóźnienia t_o - układu dolnoprzepustowego definiujemy jako czas wzrostu charakterystyki skokowej (przejściowej) układu od 0 do 0,5 wartości ustalonej

$$\boxed{t_o = t_{0,5} - t_0} \tag{16.34}$$



$$\boxed{t_n = \frac{0{,}35 \div 0{,}45}{f_g}} \tag{16.35}$$

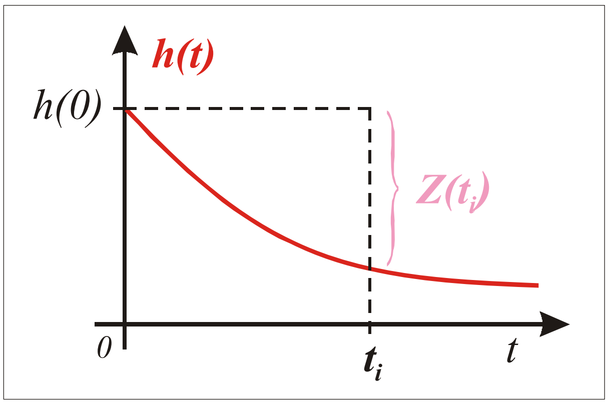
$$\boxed{t_o = \frac{0{,}1}{f_g}} \tag{16.36}$$

Funkcję zwisu Z(t) - układu górnoprzepustowego definiujemy:

$$\boxed{Z(t) = h(t)_{ust} - h(t) = h(0) - h(t)} \tag{16.37}$$

lub funkcję zwisu w procentach

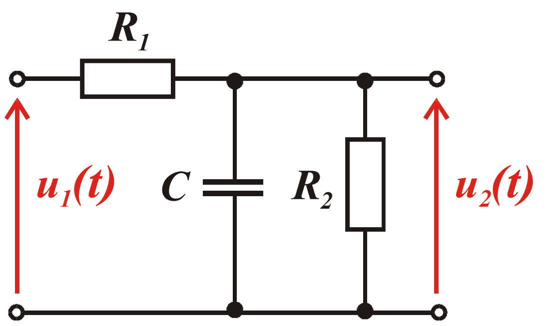
$$\boxed{Z\%(t) = \frac{h(0) - h(t)}{h(0)} \cdot 100\%} \tag{16.38}$$



Dla małych wartości t

$$\boxed{Z\%(t) \approx 200\,\pi\, f_g\, t} \tag{16.39}$$

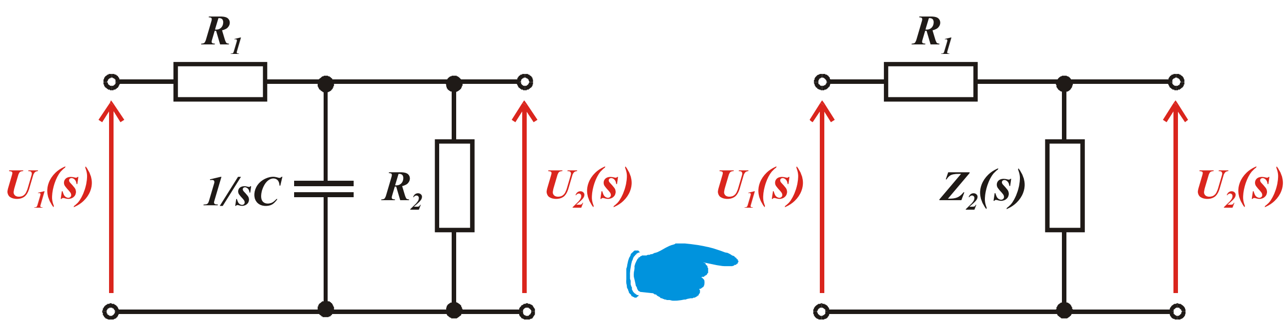
PRZYKŁAD 2: Dla układu przedstawionego na rysunku, mając dane R_1=9kΩ, R_2=1kΩ, C=1mF, wyznaczyć:



1. **charakterystykę skokową,**
2. **czas narastania i opóźnienia,**
3. **charakterystykę impulsową.**

Ad.1.

- Podajemy skok jednostkowy na wejście układu i przedstawiamy schemat operatorowy układu



$$\text{gdzie: } Z_2(s) = \frac{\frac{1}{sC}R_2}{\frac{1}{sC}+R_2} = \frac{R_2}{1+sR_2C}$$

- Korzystając z dzielnika napięcia wyznaczamy operatorową funkcję układu

$$K(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_2(s)+R_1} = \frac{\frac{R_2}{1+sR_2C}}{\frac{R_2}{1+sR_2C}+R_1} = \frac{R_2}{R_2+R_1(1+sR_2C)}$$

$$= \frac{R_2}{R_2+R_1+sR_1R_2C} = \frac{1}{10+9s}$$

- Wyznaczamy operatorową odpowiedź układu na wymuszenie skokiem jednostkowym (zależność 16.17)

$$H(s)=\frac{K(s)}{s}=\frac{\frac{1}{10+9s}}{s}=\frac{1}{s(10+9s)}$$

UWAGA: ***znając H(s) możemy wyznaczyć*** (zal.16.31)

$$h(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\,H(s)=\lim_{s\to\infty} s\,\frac{1}{s(10+9s)}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{10+9s}=0$$

$$h(\infty)=\lim_{s\to 0} s\,H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{10+9s}=0{,}1$$

- Wyznaczamy charakterystykę czasową skokową układu (zal.16.21)

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(10+9s)}\right]$$

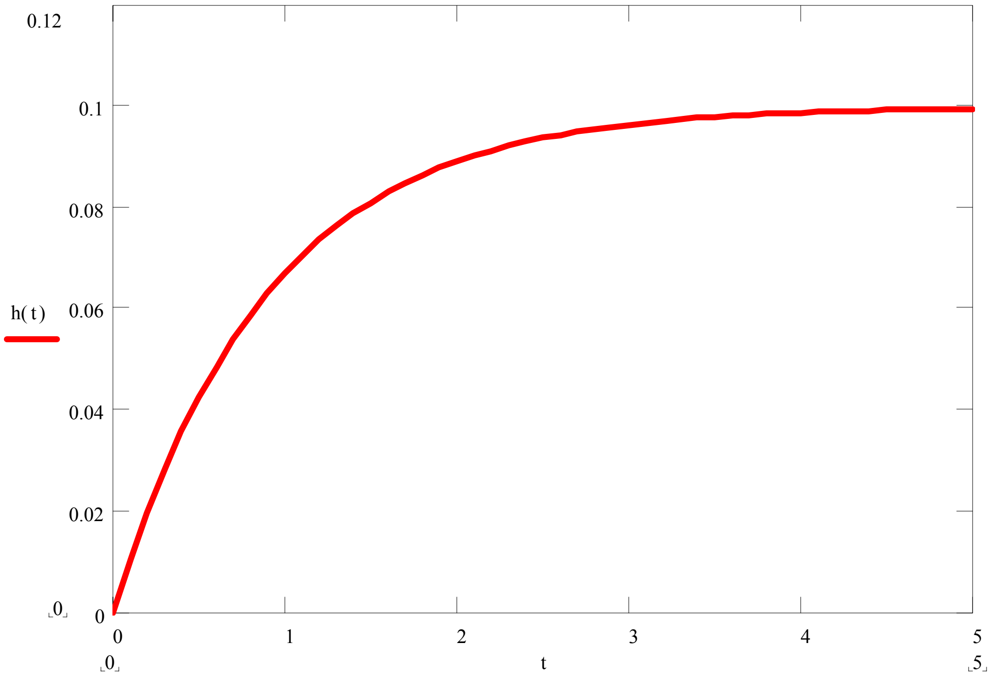
$$\frac{1}{s(s+a)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

Lp.9.

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(9s+10)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{9}}{s\left(s+\frac{10}{9}\right)}\right]=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s+\frac{10}{9}\right)}\right]$$

$$h(t)=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{\frac{10}{9}}\left(1-e^{-\frac{10}{9}t}\right)\right]1(1)$$

$$\boxed{h(t) = \left(0{,}1 - 0{,}1e^{-\frac{10}{9}t}\right)1(t)}$$



Ad.2.

Czas narastania t_n - $\boxed{t_n = t_{0,9} - t_{0,1}}$

Czas opóźnienia t_o - $\boxed{t_o = t_{0,5} - t_0}$

Wiemy już, że

$$t_0 = h\left(0^+\right) = 0$$
$$t_{ustal} = h(\infty) = 0{,}1$$

$$h(t_{0,9}) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$$

$$0,1 - 0,1e^{-\frac{10}{9}t} = 0,09$$

$$-0,1e^{-\frac{10}{9}t} = 0,09 - 0,1$$

$$-0,1e^{-\frac{10}{9}t} = -0,01$$

$$e^{-\frac{10}{9}t} = 0,1$$

$$-\frac{10}{9}t = \ln(0,1)$$

$$-\frac{10}{9}t = -2,303$$

stąd: $t_{0,9} = 2,073$

$$h(t_{0,1}) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$$

stąd: $t_{0,1} = 0,095$

czyli:

$$\boxed{t_n = t_{0,9} - t_{0,1} = 2,073 - 0,095 = 1,977}$$

$$h(t_{0,5}) = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$$

stąd: $t_{0,5} = 0,624$

czyli:

$$\boxed{t_o = t_{0,5} - t_0 = 0,624 - 0 = 0,624}$$

Ad.3.

Sposób 1

Znając charakterystykę skokową, można wykorzystać zal. 16.22.

$$k(t)=\frac{d\,h(t)}{d\,t}=\frac{d}{dt}\left[\left(0{,}1-0{,}1e^{-\frac{10}{9}t}\right)1(t)\right]=\left(0{,}1\frac{10}{9}e^{-\frac{10}{9}t}\right)1(t)$$

$$\boxed{k(t)=\left(\frac{1}{9}e^{-\frac{10}{9}t}\right)1(t)}$$

Sposób 2

Znając operatorową funkcję układu

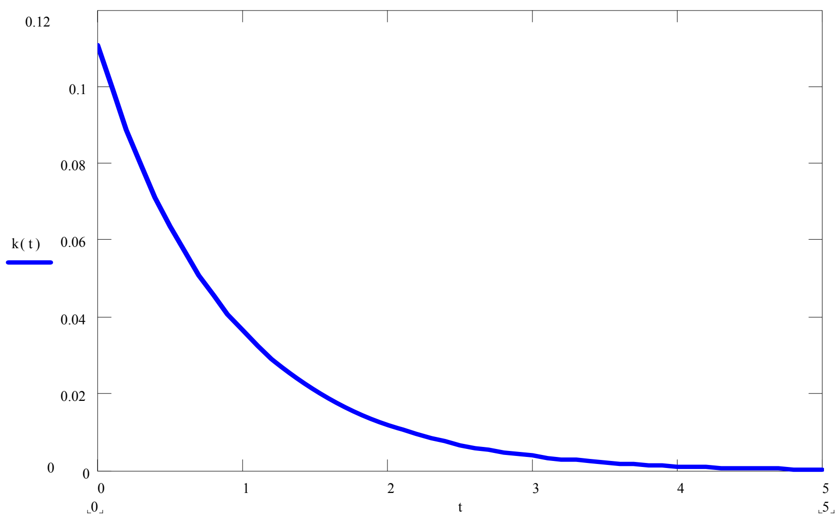
$$K(s)=\frac{1}{10+9s}$$

wykorzystujemy zal.16.20:

$$k(t)=\mathcal{L}^{-1}[K(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{10+9s}\right]=\left(\frac{1}{9}e^{-\frac{10}{9}t}\right)1(t)$$

$$\frac{1}{s+a}\quad\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\quad e^{-at}$$

Lp.5.



dr inż. Marek Szulim
e-mail: mszulim@wat.edu.pl