

## ĆWICZENIE NR 4

### POMIARY W OBWODACH RLC PRĄDU PRZEMIENNEGO

**Cel ćwiczenia:** doświadczalne sprawdzenie prawa Ohma, praw Kirchhoffa i zależności fazowych między sinusoidalnie zmiennymi przebiegami prądów i napięć w obwodach zawierających elementy R, L, C, oraz wykresów wskazowych badanych obwodów.

#### 2.1. Podstawy teoretyczne ćwiczenia

##### 2.1.1. Elementy obwodów RLC

###### Rezystor

W obwodzie prądu harmonicznego zawierającego idealny rezystor wartości chwilowe napięcia  $u_R$  oraz prądu  $i$  spełniają prawo Ohma

$$u_R = Ri \quad (2.1)$$

Zakładając, że przebieg prądu ma postać

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \quad (2.2)$$

wówczas płynąc przez rezystor o rezystancji  $R$ , na jego zaciskach spowoduje powstanie napięcia

$$u(t) = Ri(t) = RI_m \sin(\omega t + \Psi_i) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u), \quad (2.3)$$

przy czym amplituda przebiegu napięcia

$$U_m = RI_m \quad (2.4a)$$

oraz

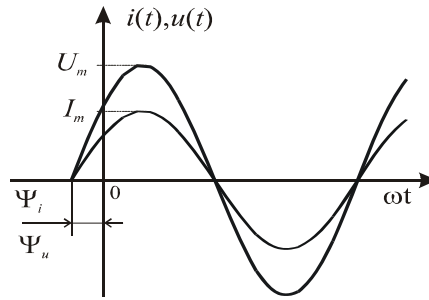
$$U_m = \sqrt{2}U, \quad (2.4b)$$

natomiast faza początkowa

$$\Psi_u = \Psi_i. \quad (2.5)$$

Przesunięcie fazowe  $\varphi$  między przebiegami  $u(t)$  i  $i(t)$  wynosi zero (rys.3.1):

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = 0 \quad (2.6)$$



Rys.2.1. Przebieg napięcia i prądu dla idealnego rezystora

Przedstawiając związki między prądem i napięciem w postaci symbolicznej otrzymamy:

symboliczną wartość chwilową prądu

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\Psi_i}, \quad (2.7)$$

oraz symboliczną wartość chwilową napięcia

$$\underline{u}(t) = R \underline{i}(t) = R \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}. \quad (2.8)$$

Zatem amplituda symboliczna napięcia wynosi

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m \quad (2.9)$$

co oznacza, że przy uwzględnieniu zależności:  $U_m = \sqrt{2}U$  oraz  $I_m = \sqrt{2}I$

$$\underline{U} = R \underline{I} \quad \text{oraz} \quad \underline{I} = G \underline{U}. \quad (2.10)$$

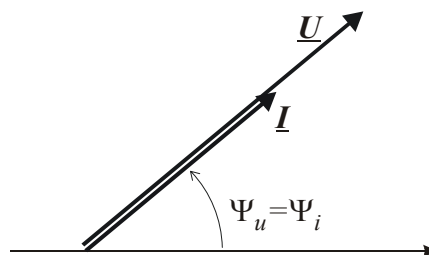
Przedstawiając symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy

$$\underline{U} = U e^{j\Psi_u} = R I e^{j\Psi_i}; \quad (2.11)$$

a co za tym idzie

$$\Psi_u = \Psi_i. \quad (2.12)$$

Wobec tego wskaz napięcia  $\underline{U} = R \underline{I}$  znajduje się na tej samej prostej co wskaz  $\underline{I}$  (rys.3.2)



Rys.2.2. Wykres wskazowy napięcia i prądu dla rezystora

## Cewka indukcyjna

Prąd sinusoidalnie zmienny w idealnej cewce o indukcyjności  $L$  indukuje napięcie na jej zaciskach wyrażone zależnością

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.13)$$

Przyjmując, że w cewce płynie prąd harmoniczny

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i), \quad (2.14)$$

napięcie na cewce wynosi

$$u(t) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \Psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u). \quad (2.15)$$

Z powyższej zależności wynika, że amplituda przebiegu napięcia przyjmuje postać

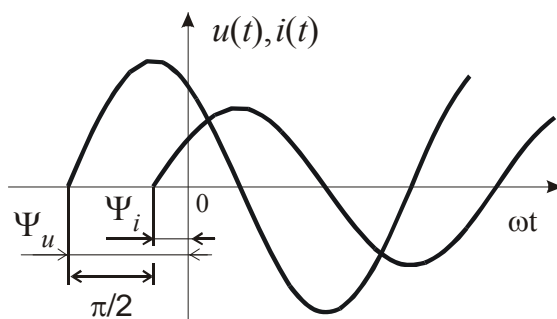
$$U_m = \omega L I_m = X_L I_m \quad (2.16)$$

natomiast faza początkowa wynosi

$$\Psi_u = \Psi_i + \frac{\pi}{2} \quad (2.17)$$

Oznacza to, że przesunięcie fazowe  $\varphi$  między przebiegami  $u(t)$  i  $i(t)$  cewki indukcyjnej wynosi (rys.3.3):

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = \frac{\pi}{2} \quad (2.18)$$



Rys.3.3 . Przebieg napięcia i prądu dla idealnej cewki

Dla cewki indukcyjnej - symboliczną wartość chwilową prądu jest wyrażona przez zależność:

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\Psi_i}, \quad (2.19)$$

natomiast symboliczna wartość chwilowa napięcia

$$\underline{u}(t) = L \frac{di(t)}{dt} = j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad (2.20)$$

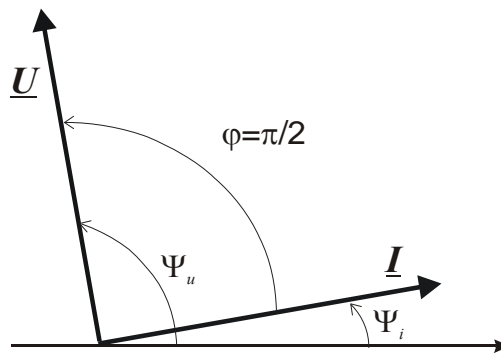
Zatem skuteczna zespolona wartość napięcia jest określona zależnością

$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I}, \quad (2.22)$$

co oznacza, że

$$\underline{U}_L = x_L \underline{I} e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (2.22)$$

Pomnożenie wskazu  $\underline{I}$  przez  $j\omega L$  powoduje, że wskaz  $\underline{U}$  wyprzedza o  $90^\circ$  wskaz prądu (rys.3.4) zgodnie z zależnością (3.18)



Rys.2.4. Wykres wskazowy dla cewki

### Kondensator

Dla napięcia  $u(t)$  na zaciskach idealnego kondensatora o pojemności  $C$ , prąd płynący przez niego opisuje zależność (3.26)

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (2.26)$$

Przyjmując, że na zaciskach kondensatora występuje napięcie

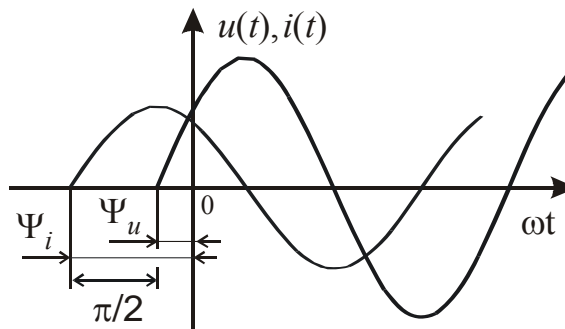
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u), \quad (2.27)$$

wówczas prąd płynący przez kondensator wynosi

$$i(t) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i). \quad (2.28)$$

Zatem przesunięcie fazowe  $\varphi$  między przebiegami  $u(t)$  i  $i(t)$  na kondensatorze wynosi (rys.3.5):

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (2.30)$$



Rys. 2.5. Przebieg napięcia i prądu dla idealnego kondensatora

Wartość symboliczna chwilowa napięcia na kondensatorze wynosi

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\Psi_u}, \quad (2.31)$$

natomiast prądu

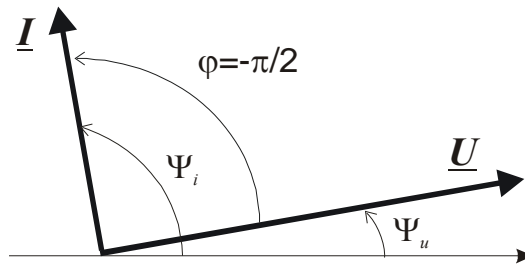
$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = j\omega C \underline{U}_m e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}. \quad (2.32)$$

Zatem symboliczna wartość skuteczna prądu jest wyrażona następująco

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U} \quad \text{oraz} \quad \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -jX_C \underline{I} \quad (2.34)$$

Przedstawiając symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy

$$\underline{U}_C = \frac{1}{\omega C} I e^{-j\frac{\pi}{2}} = X_C I e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (2.35)$$



Rys.2.6. Wykres wskazowy dla kondensatora

Pomnożenie wektora  $\underline{I}$  przez  $1/j\omega C$  powoduje, że wektor  $\underline{U}$  jest opóźniony o  $90^\circ$  względem prądu  $\underline{I}$  (rys.3.6) zgodnie z zależnością (3.30)

### 3.1.2. Podstawowe prawa w obwodach elektrycznych w postaci zespolonej

**Prawo Ohma:** symboliczna wartość skuteczna napięcia  $\underline{U}$  na dwójniku równa się iloczynowi impedancji dwójnika  $\underline{Z}$  i wartości skutecznej prądu  $\underline{I}$  w nim występującego:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (2.38)$$

**Impedancja** (opór zespolony)  $\underline{Z}$  charakteryzuje przewodnictwo elektryczne dwójnika dla prądu sinusoidalnego. Podstawiając w (3.38) symboliczne wartości skuteczne w postaci wykładniczej, otrzymujemy:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\Psi_u}}{I e^{j\Psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} \quad (2.39)$$

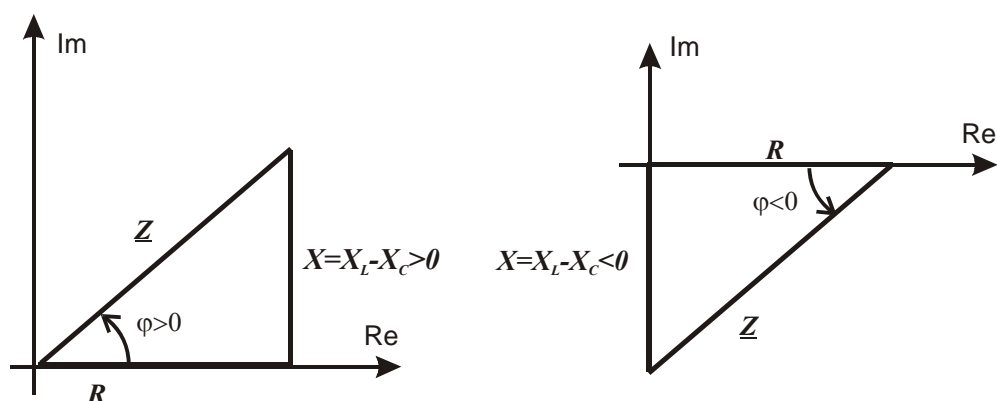
Impedancję  $\underline{Z}$  można przedstawić geometrycznie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (rys.3.7) za pomocą **trójkąta impedancji** w którym

$$Z = \frac{U}{I}, \quad \arg \underline{Z} = (\Psi_u - \Psi_i) = \varphi. \quad (2.40)$$

Zatem  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi} \quad \underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctg \frac{X}{R}}$

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad (2.41)$$

↙
↖  
 rezystancja  reaktancja



Rys.2.7. Trójkąt impedancji

Prawo Ohma można także przedstawić następująco:

**Symboliczna wartość skuteczna prądu  $\underline{I}$  w dwójniku równa się iloczynowi admitancji dwójnika  $\underline{Y}$  i wartości skutecznej napięcia  $\underline{U}$  na jego zaciskach**

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad (2.42)$$

**Admitancja** (przewodność zespolona dwójnika – której jednostką jest simens S) dwójnika równa się odwrotności jego impedancji

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (2.43)$$

### **I prawo Kirchhoffa - prądowe prawo Kirchhoffa**

**Algebraiczna suma symbolicznych wartości chwilowych prądów  $\underline{i}_n(t)$  we wszystkich gałęziach dołączonych do jednego, dowolnie wybranego węzła obwodu jest w każdej chwili czasu równa zeru**

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \underline{i}_k(t) = 0 \quad , \quad (2.47)$$

gdzie:  $\lambda_k = \pm 1$  („+” jeśli prąd elektryczny ma zwrot do węzła; „-” jeśli zwrot jest przeciwny, od węzła)

Jest ono także słuszne dla symbolicznych amplitud (3.47a) oraz symbolicznych wartości skutecznych (3.47b) odpowiednich prądów:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \underline{I}_{m k} = 0, \quad (2.47a)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k I_k = 0 \quad (2.47b)$$

### II prawo Kirchhoffa - napięciowe prawo Kirchhoffa

Algebraiczna suma symbolicznych wartości chwilowych napięć  $\underline{u}_n(t)$  na wszystkich elementach, tworzących dowolnie wybrane oczko obwodu jest w każdej chwili czasu równa zero

$$\sum_t \sum_{k=1}^n v_k \underline{u}_k(t) = 0 \quad (2.48)$$

gdzie:  $v_k = \pm 1$  („+” jeśli zwrot napięcia jest zgodny z przyjętym za dodatni kierunkiem obiegu oczka; „-” jeśli jest przeciwny)

Jest ono także słuszne dla symbolicznych amplitud (3.48a) oraz symbolicznych wartości skutecznych (3.48b) odpowiednich napięć

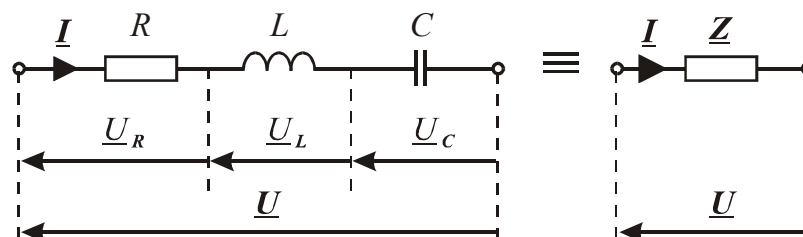
$$\sum_{k=1}^n v_k \underline{U}_{m k} = 0 \quad (2.48a)$$

$$\sum_{k=1}^n v_k \underline{U}_k = 0 \quad (2.48b)$$

### 3.1.3. Połączenia elementów $R, L, C$

#### Obwód szeregowy RLC

Obwód RLC w postaci szeregowego połączenia idealnego rezystora  $R$ , idealnej cewki indukcyjnej  $L$  i idealnego kondensatora  $C$  przedstawiono na Rys.3.8.



Rys. 2.8. Szeregowy obwód RLC

W tabeli poniżej dokonano zestawienia zależności opisujących elementy szeregowego obwodu RLC:



Zależności na:		
	napięcia na elemencie obwodu	impedancję elementu obwodu
$R$	$\underline{U}_R = R \underline{I}$	$\underline{Z}_R = R$
$L$	$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I}$	$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$
$C$	$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I} = -jX_C \underline{I}$	$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$

Dla tak skonfigurowanego układu napięcie symboliczne wynosi:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = [R + j(X_L - X_C)] \underline{I} = (R + jX) \underline{I}, \quad (2.49)$$

natomiast

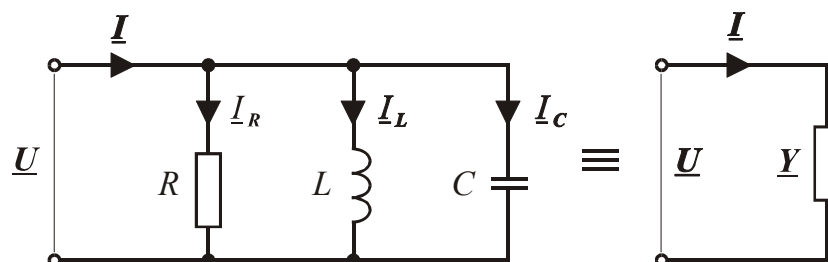
$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (2.50)$$

przy czym

$$\arg \underline{Z} = \varphi = \arctg \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) = \arctg \left( \frac{X}{R} \right). \quad (2.51)$$

### Obwód równoległy RLC

Połączenie równoległe elementów RLC przedstawia Rys. 3.9.



Rys. 2.9. Równoległy obwód RLC i równoważny dwójnik admitancyjny

Podobnie jak dla obwodu szeregowego RLC w tabeli poniżej dokonano zestawienia zależności opisujących elementy równoległego obwodu RLC:

Zależności na:		
	prąd w elemencie obwodu	admitancję elementu obwodu
$R$	$\underline{I}_R = G\underline{U}$	$\underline{Y}_R = G$
$L$	$\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\underline{U} = -j\frac{1}{\omega L}\underline{U} = -jB_L\underline{U}$	$\underline{Y}_L = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L = -j\frac{1}{X_L}$
$C$	$\underline{I}_C = j\omega C\underline{U} = jB_C\underline{U}$	$\underline{Y}_C = j\omega C = jB_C = j\frac{1}{X_C}$

Ponieważ

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} = \left[ G + j\left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \underline{U} = [G + j(B_C - B_L)] \underline{U} = (G + jB)\underline{U} , \quad (2.51)$$

zatem admitancja  $Y = \sqrt{G^2 + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} , \quad (2.52)$

wówczas  $\arg \underline{Y} = \arctg\left( \frac{B_C - B_L}{G} \right) = \arctg\left( \frac{B}{G} \right) . \quad (2.53)$

### Warunek równoważności szeregowego i równoległego obwodu RLC

Ogólny warunek równoważności obwodów; szeregowego rys. 3.8. i równoległego rys. 3.9. wyraża się równością ich odpowiednich impedancji (lub admitancji) symbolicznych. Przyjmując dla oznaczenia elementów obwodu szeregowego indeks "s", a równoległego indeks "r", można powyższy warunek zapisać w postaci.

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_r \quad (2.54)$$

przy uwzględnieniu, że  $\underline{Z}_s = R + j(X_{L_s} - X_{C_s}) , \quad (2.55)$

$$\underline{Z}_r = \frac{1}{G_r + j(B_{C_r} - B_{L_r})} . \quad (2.54)$$

Stąd po podstawieniu wzorów (3.55) i (3.56) do równania (3.54) i przekształceniach otrzymuje się zależności:

$$G_R = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} , \quad (2.55)$$

$$B_{C_r} - B_{L_r} = \frac{-X_s}{R_s^2 + X_s^2} , \quad (2.56)$$

$$X_s = X_{L_s} - X_{C_s} , \quad (2.57)$$

pozwalające ustalić wartości parametrów obwodów równoważnych. Jeżeli w rozważanych obwodach pominiemy indukcyjność  $L$ , to odpowiednie zależności uproszczą się do następujących postaci:

$$R_r = \frac{Z_s^2}{R_s} \quad (2.58)$$

$$C_r = C_s \left( \frac{C_s}{Z_s} \right)^2 \quad (2.59)$$

Z rozważań tych wynika, że obliczone wartości parametrów obwodów równoważnych zależą od częstotliwości. Oznacza to, że obwody szeregowy i równoległy są sobie równoważne tylko dla jednej częstotliwości, dla której obliczono parametry równoważne.